

KG 1: Cvičení č.11

Irena Penev

19.12.2025

Dirichletův princip

Připomenutí: Kdykoliv rozmístíme n kuliček do k krabic, bude v jedné krabici aspoň $\lceil n/k \rceil$ kuliček.

Příklad 3 [Cvičení č.10] (Tabulka).

- (a) *Políčka nekonečné tabulky obarvujeme 3 barvami. Dokažte, že existují dva řádky a dva sloupce takové, že 4 políčka v jejich průsečících mají stejnou barvu.*
- (b) *Nechť $p, k \in \mathbb{N}$. Políčka nekonečné tabulky obarvujeme p barvami. Dokažte, že existuje k řádků a k sloupců takových, že k^2 políček v jejich průsečících má stejnou barvu.*

Příklad 5 [Cvičení č.10] (Erdős-Szekeres pro monotónní posloupnosti). *Dokažte, že každá posloupnost $n^2 + 1$ navzájem různých čísel obsahuje rostoucí nebo klesající podposloupnost délky $n + 1$.*

Příklad 6 [Cvičení č.10] (Rostoucí sled). *Je dán graf s n vrcholy a m hranami. Každá hrana má jinou váhu. Dokažte, že existuje tah skrz $\lceil 2m/n \rceil$ hran, ve kterém váhy postupně rostou.*

Nápověda (Ehud Friedgut): *Na každý vrchol grafu postavme člověka a vyhlášíme hrany v rostoucím pořadí jejich vah (od hrany s nejmenší vahou po hranu s největší vahou). Pokaždé, když je vyhlášena hrana, si dva lidé stojící na jejích koncových vrcholech vymění místa.*

Ramseyovy věty podruhé

Připomenutí: “Nejde udělat totální nepořádek.” Barvíme všechny p -prvkové podmnožiny nějaké dané množiny (buď $[N]$ nebo $\mathbb{N}$) pomocí b různých barev. Řekneme, že podmnožina velikosti $m \geq p$ je *jednobarevná*, pokud každá její p -prvková podmnožina dostala tu samou barvu.

Věta (Ramseyova, pro hypergrafy). *Fix $p, b, m \in \mathbb{N}$. Pak $\exists N \in \mathbb{N}$, že v každém obarvení všech p -prvkových podmnožin množiny $[N]$ pomocí b barev existuje jednobarevná m -prvková podmnožina.*

Věta (Ramseyova, nekonečná). *Fix $p \in \mathbb{N}$. Pak pro každé obarvení všech p -prvkových podmnožin $\mathbb{N}$ pomocí b barev existuje nekonečná jednobarevná podmnožina.*

Příklad 1. Řekněme, že $(p, b, N) = (3, 2, 5)$, tj. obarvujeme 3-prvkové množiny $[5]$ pomocí 2 barev.

- (a) Kolik takových podmnožin je?
- (b) Kolik je možných obarvení?
- (c) Najděte obarvení, které neobsahuje jednobarevnou podmnožinu velikosti $m = 4$.

Příklad 2. Dokažte, že každá nekonečná posloupnost přirozených čísel obsahuje nekonečnou konstantní podposloupnost nebo nekonečnou rostoucí podposloupnost.

Příklad 3. Dokažte, že mezi dostatečně mnoha body v rovině lze vždy najít 10 bodů, které všechny leží na jedné přímce, nebo 10 bodů v obecné poloze (tj. žádné 3 z nich neleží na jedné přímce).

Příklad 4. Řekněme, že množina M přirozených čísel je superlichá (resp. supersudá), pokud $\forall x, y \in M$ ($x \neq y$) má číslo $x + y$ lichý (resp. sudý) počet různých prvočíselných dělitelů.

- (a) Dokažte, že existuje nekonečná superlichá množina nebo nekonečná supersudá množina.
 - (b) Dokažte, že existuje nekonečná superlichá množina i nekonečná supersudá množina.
-

Příklad 5 (Bonus). Ukažte, že obarvíme-li libovolně hrany úplného grafu na alespoň třech vrcholech dvěma barvami, potom lze vždy nalézt hamiltonovskou kružnici takovou, že je buď celá jednobarevná, nebo její hrany lze rozdělit na dvě jednobarevné cesty.