

KG 1: Cvičení č.10

Irena Penev

12.12.2025

Dirichletův princip

Připomenutí: Kdykoliv rozmístíme n kuliček do k krabic, bude v jedné krabici aspoň $\lceil n/k \rceil$ kuliček.

Příklad 1 (Narozeniny). *Jak velká musí být skupina lidí, aby v ní zaručeně existovali 3 lidé, kteří slaví narozeniny ve stejném měsíci?*

Příklad 2 (Hračky). *Emma uklidila svých 20 hraček do 7 krabic. Dokažte, že v některých dvou krabicích je stejný počet hraček.*

Příklad 3 (Tabulka).

- (a) *Políčka nekonečné tabulky obarvujeme 3 barvami. Dokažte, že existují dva řádky a dva sloupce takové, že 4 políčka v jejich průsečících mají stejnou barvu.*
- (b) *Nechť $p, k \in \mathbb{N}$. Políčka nekonečné tabulky obarvujeme p barvami. Dokažte, že existuje k řádků a k sloupců takových, že k^2 políček v jejich průsečících má stejnou barvu.*

Příklad 4 (Odčítací trik, Canada 2011). *Dokažte, že každému dostatečně velkému přirozenému číslu lze smazat několik prvních a několik posledních číslic (ne všechny) tak, aby vznikl násobek čísla 2011.*

Příklad 5 (Erdős-Szekeres pro monotónní posloupnosti). *Dokažte, že každá posloupnost $n^2 + 1$ navzájem různých čísel obsahuje rostoucí nebo klesající podposloupnost délky $n + 1$.*

Příklad 6 (Rostoucí sled). *Je dán graf s n vrcholy a m hranami. Každá hrana má jinou váhu. Dokažte, že existuje tah skrz $\lceil 2m/n \rceil$ hran, ve kterém váhy postupně rostou.*

Nápověda (Ehud Friedgut): *Na každý vrchol grafu postavme člověka a vyhlášíme hrany v rostoucím pořadí jejich vah (od hrany s nejmenší vahou po hranu s největší vahou). Pokaždé, když je vyhlášena hrana, si dva lidé stojící na jejích koncových vrcholech vymění místa.*

Ramseyovy věty

Připomenutí: Barvíme hrany úplného grafu K_N pomocí k barev a hledáme jednobarevné kliky.

Pro $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ definujeme *Ramseyovo číslo* $R_2(n_1, \dots, n_k)$ jako nejmenší $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé obarvení hran úplného grafu K_N pomocí k barev $i = 1, 2, \dots, k$ existuje barva $i \in [k]$ taková, že dané obarvení obsahuje K_{n_i} jako podgraf se všemi hranami obarvenými i -tou barvou.

Věta (Ramseyova). *Pro každé $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ je číslo $R_2(n_1, \dots, n_k)$ konečné.*

Z přednášky víme $R_2(3, 3) = 6$ a obecně $2^{k/2} \leq R_2(k, k) \leq \binom{2k-2}{k-1} < 4^k$.

Příklad 7 (Ramsey?). *Pro $N \in \mathbb{N}$ označme K_N úplný graf na vrcholech $V = \{1, 2, \dots, N\}$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?*

- (a) *Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech.*
- (b) *Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný podgraf $K_{10,10}$ na 20 vrcholech.*
- (c) *Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech, který obsahuje vrchol číslo 1.*
- (d) *Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech, jehož každý vrchol je mocnina dvojky.*
- (e) *Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N a smyčky dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech (i se smyčkami).*
- (f) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo G obsahuje doplněk $K_{n,n}$ jako podgraf.*
- (g) *Pro každý graf G existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že v libovolném 2-obarvení hran K_N najdeme jednobarevnou G jako indukovaný podgraf.*

Příklad 8 (IMO 1964, P4). *Dokažte, že $R_2(3, 3, 3) \leq 17$.*

Příklad 9 (IMO shortlist 1987). *Dokažte, že čísla $\{1, 2, \dots, 1987\}$ lze obarvit čtyřmi barvami tak, že každá aritmetická posloupnost délky 10 bude obsahovat členy více než jedné barvy.*