

# KG 1: Cvičení č.9

Irena Penev

5.12.2025

## Hranová a vrcholová souvislost

Připomenutí: Ať  $G = (V, E)$  je graf s  $n \geq 2$  vrcholy. *Hranový řez* v  $G$  je množina hran  $F \subseteq E$  taková, že graf  $(V, E \setminus F)$  je nesouvislý. *Hranová souvislost*  $k_e(G)$  je velikost nejmenšího hranového řezu v  $G$ .

Podobně *vrcholový řez* v  $G$  je množina vrcholů  $A \subseteq V$  taková, že graf  $(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$  je nesouvislý. *Vrcholovou souvislost*  $k_v(G)$  grafu  $G$  definujeme jako  $n - 1$ , je-li  $G$  úplný graf  $K_n$ , a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu v  $G$  jinak.

Řekneme, že graf  $G$  je *hranově  $t$ -souvislý* pro  $t \in \mathbb{N}_0$ , pokud platí  $k_e(G) \geq t$  a *vrcholově  $t$ -souvislý*, pokud platí  $k_v(G) \geq t$ .

**Lemma** (Vztah vrcholové a hranové souvislosti). *Pro každý graf  $G$  platí  $k_v(G) \leq k_e(G)$ .*

**Lemma** (Ušaté lemma). *Graf  $G$  je vrcholově 2-souvislý, kdyžž ho lze dostat z cyklu lepením uší.*

**Věta** (Mengerovy věty). *Pro graf  $G = (V, E)$  na  $n \geq 2$  vrcholech a přirozené  $t \in \mathbb{N}$  platí*

- (a)  $k_e(G) \geq t$ , kdyžž mezi každými dvěma různými vrcholy existuje  $\geq t$  hranově disjunkt-  
ních cest.
  - (b)  $k_v(G) \geq t$ , kdyžž mezi každými dvěma různými vrcholy existuje  $\geq t$  vrcholově dis-  
junkt-  
ních cest.
- 

**Příklad 5 [Cvičení č.8]** (Fan lemma / lemma o vějíři). *Je dán vrcholově  $k$ -souvislý graf  $G = (V, E)$  a v něm vrchol  $u$  a dalších  $k$  vrcholů  $v_1, \dots, v_k$ .*

- (a) *Do  $G$  přidáme vrchol  $w$  a napojíme ho na každý z vrcholů  $v_1, \dots, v_k$ . Dokažte, že nově vzniklý graf  $G'$  je také vrcholově  $k$ -souvislý.*
- (b) *Dokažte, že v  $G$  existuje “vějíř” (aka fan) z  $u$  do  $v_1, \dots, v_k$ , tj.  $k$  vnitřně-vrcholově-disjunkt-  
ních cest, kde  $i$ -tá cesta vede z  $u$  do  $v_i$ .*

**Příklad 6 [Cvičení č.8]** (Dlouhý cyklus). *Je dán vrcholově 10-souvislý graf, v něm cyklus  $C_k$  délky  $k$  a vrchol  $v \notin C_k$ , který na cyklu neleží. Existuje delší cyklus, který prochází vrcholem  $v$ ?*

- (a) *Dokažte, že ano, pokud  $k \in \{3, 4, \dots, 10\}$ .*
  - (b) *Dokažte, že ano, pokud  $k \in \{11, 12, \dots, 19\}$ .*
-

# Počítání dvěma způsoby

Připomenutí: Pokud dvěma způsoby spočítáme to samé, musí vyjít v obou případech to samé.

**Příklad 1** (Součty). *Tabulka  $10 \times 10$  je vyplněna jedničkami a nulami tak, že součty v každých dvou řádcích jsou různé a součty ve všech sloupcích jsou stejné. Čemu jsou rovné součty ve sloupcích?*

**Příklad 2** (Steinerův tábor). *Na táboře je 15 dětí. Každý den mají tři děti službu v kuchyni. Platí, že každá dvojice dětí má právě jednu společnou službu. Kolik dní trvá tábor?*

**Příklad 3** (Čtyřcyklus). *Dokažte, že 5-regulární graf na 20 vrcholech obsahuje čtyřcyklus  $C_4$ .*

**Příklad 4** (Nikdy Most!). *Je dán souvislý 4-regulární graf  $G$ . Dokažte, že  $k_e(G) \geq 2$ .*

**Příklad 5** (Písemka). *Dvacet studentů psalo písemku, která měla čtyři úlohy. Pro každou dvojici studentů bychom v písemce našli úlohu, kterou oba vyřešili správně. Dokažte, že některou z úloh správně vyřešila více než polovina studentů.*

**Příklad 6** (Pravoúhelníky). *Do každého políčka tabulky  $n \times n$  napíšeme, kolik pravoúhelníků (obdélníků a čtverců) v tabulce ho obsahuje (například do rohového políčka tabulky  $3 \times 3$  takto napíšeme 9). Dokažte, že součet všech  $n^2$  čísel v tabulce je druhá mocnina celého čísla.*

**Příklad 7** (Oslava). *Na oslavě zná každý (včetně Adama) 3 kluky a 4 holky ("znání se" je vzájemné). Kolik nejméně tam může být lidí?*

**Příklad 8** (Turnaj). *V šachovém turnaji  $n$  hráčů hrál každý s každým (jednou, bez remíz). Pro hráče  $i = 1, 2, \dots, n$  označme  $w_i$  a  $\ell_i$  počet jeho vítězství a proher.*

(a) *Dokažte, že  $\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{i=1}^n \ell_i$ .*

(b) *Dokažte, že  $\sum_{i=1}^n w_i^2 = \sum_{i=1}^n \ell_i^2$ .*

---

**Věta** (Cayley). *Pro každé  $n \geq 2$  platí  $t(K_n) = n^{n-2}$ .*

**Příklad 9** (Kostry). *Spočtete počet koster následujících grafů:*

1.  $C_n$ , tedy cyklus na  $n$  vrcholech.
2.  $C_m \oplus_e C_n$ , tedy dva cykly slepené společnou hranou  $e$ ,
3.  $K_n - e$ , tedy graf  $K_n$  bez jedné hrany  $e$ .
4.  $K_n \div e$ , tedy graf  $K_n$  s jednou hranou  $e$  podrozdělenou extra vrcholem.
5. (Bonus)  $K_{a,b}$ , tedy úplný bipartitní graf.