

KG 1: Cvičení č.8

Irena Penev

28.11.2025

Hranová a vrcholová souvislost

Připomenutí: Ať $G = (V, E)$ je graf s $n \geq 2$ vrcholy. *Hranový řez* v G je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nespojitý. *Hranová souvislost* $k_e(G)$ je velikost nejmenšího hranového řezu v G .

Podobně *vrcholový řez* v G je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nespojitý. *Vrcholovou souvislost* $k_v(G)$ grafu G definujeme jako $n - 1$, je-li G úplný graf K_n , a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu v G jinak.

Řekneme, že graf G je *hranově t -souvislý* pro $t \in \mathbb{N}_0$, pokud platí $k_e(G) \geq t$ a *vrcholově t -souvislý*, pokud platí $k_v(G) \geq t$.

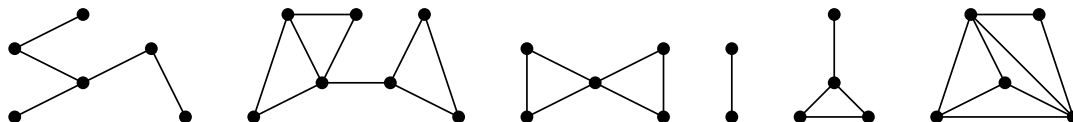
Lemma (Vztah vrcholové a hranové souvislosti). *Pro každý graf G platí $k_v(G) \leq k_e(G)$.*

Lemma (Ušaté lemma). *Graf G je vrcholově 2-souvislý, když ho lze dostat z cyklu lepením uší.*

Věta (Mengerovy věty). *Pro graf $G = (V, E)$ na $n \geq 2$ vrcholech a přirozené $t \in \mathbb{N}$ platí*

- (a) $k_e(G) \geq t$, kdyžž mezi každými dvěma různými vrcholy existuje $\geq t$ hranově disjunkt-ních cest.
 - (b) $k_v(G) \geq t$, kdyžž mezi každými dvěma různými vrcholy existuje $\geq t$ vrcholově dis-junktních cest.
-

Příklad 1 (Konkrétní grafy). *Určete hranovou a vrcholovou souvislost následujících šesti grafů.*



Příklad 2 (Velký rozdíl). *Najděte graf G , pro který platí $k_v(G) = 1$ a $k_e(G) = 10$.*

Příklad 3 (Mazání vrcholu). Najděte příklad grafu G a vrcholu v takového, že odebráním v z G :

- (a) klesne hranová souvislost G o 10.
- (b) vzroste hranová souvislost G o 10.
- (c) vzroste vrcholová souvislost G o 10.
- (d) Bonus: O kolik nejvíce může klesnout vrcholová souvislost odebráním jednoho vrcholu?

Příklad 4 (Silná orientace). Řekneme, že orientovaný graf je silně souvislý, pokud se z každého vrcholu dá dostat do každého jiného po orientované cestě.

- (a) Dokažte, že pokud je G vrcholově 2-souvislý, tak má orientaci hran, která dá silně souvislý graf.
- (b) Dokažte, že opačná implikace neplatí.

Příklad 5 (Fan lemma / lemma o vějíři). Je dán vrcholově k -souvislý graf $G = (V, E)$ a v něm vrchol u a dalších k vrcholů $v_1, \dots, v_k$.

- (a) Do G přidáme vrchol w a napojíme ho na každý z vrcholů $v_1, \dots, v_k$. Dokažte, že nově vzniklý graf G' je také vrcholově k -souvislý.
- (b) Dokažte, že v G existuje “vějíř” (aka fan) z u do $v_1, \dots, v_k$, tj. k vnitřně-vrcholově-disjunktních cest, kde i -tá cesta vede z u do v_i .

Příklad 6 (Dlouhý cyklus). Je dán vrcholově 10-souvislý graf, v něm cyklus C_k délky k a vrchol $v \notin C_k$, který na cyklu neleží. Existuje delší cyklus, který prochází vrcholem v ?

- (a) Dokažte, že ano, pokud $k \in \{3, 4, \dots, 10\}$.
- (b) Dokažte, že ano, pokud $k \in \{11, 12, \dots, 19\}$.

Příklad 7 (Kritický graf). Buď G vrcholově 2-souvislý graf takový, že žádný z grafů $G - e$ pro libovolné $e \in E(G)$ není vrcholově 2-souvislý. (Takovým grafům se říká kriticky 2-souvislé.)

- (a) Dokažte, že alespoň jeden vrchol G má stupeň 2.
- (b) Pro každé $n \geq 2$ uveďte příklad kriticky 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň n .

Příklad 8 (Hustý $\Rightarrow$ hodně souvislý). Nechť G je libovolný graf na $2n$ vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň alespoň n . Dokažte, že G je hranově n -souvislý.