

KG 1: Cvičení č.7

Irena Penev

21.11.2025

Připomenutí: *Párování* v grafu $G = (V, E)$ je množina disjunktních hran z E . Párování je *perfektní*, pokud každý vrchol je koncem jedné hrany. Pro $A \subseteq V$ značíme $N_G(A)$ množinu *sousedů* A , tedy množinu vrcholů V , které mají souseda v A . *Vrcholové pokrytí* (“vertex cover”) v grafu $G = (V, E)$ je množina vrcholů, co “vidí do všech hran”, tj. $(C \subseteq V)(\forall e \in E): e \cap C \neq \emptyset$. Velikost nejmenšího vrcholového pokrytí v G značíme $vc(G)$.

Věta 1 (Königova–Egerváryho věta). *V každém bipartitním grafu G platí $vc(G) = m(G)$.*

Věta 2 (Hallová, verze pro bipartitní grafy). *Bipartitní graf s partitami A, B má párování nasycující partitu A , kdyžž pro každou podmnožinu $A' \subseteq A$ platí $|N_G(A')| \geq |A'|$.*

Připomenutí: Nechtě X a I jsou konečné množiny. *Množinový systém na X* (aka *hypergraf*) je libovolná $|I|$ -tice podmnožin X , tj. $\mathcal{M} = (M_i: i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. *Systém různých reprezentantů* (SRR) je prostá funkce $f: I \rightarrow X$ taková, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in M_i$.

Věta 3 (Hallová, verze pro množinové systémy). *Množinový systém $\mathcal{M} = (M_i: i \in I)$ má SRR, kdyžž pro každou podmnožinu $J \subseteq I$ platí $\left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J|$; tato podmínka se nazývá Hallová.*

Věta 4 (Hallová věta, verze pro bipartitní grafy). *Bipartitní graf s partitami A, B má párování nasycující partitu A , kdyžž pro každou podmnožinu $A' \subseteq A$ platí $|N_G(A')| \geq |A'|$.*

Příklad 1. *Dokažte, že Hallova věta implikuje Königovu–Egerváryho větu.*

Příklad 2 (Obdélníky). *Rozhodněte, zda existuje 6 obdélníků, které mají současně:*

- navzájem různé obsahy, a to 21, 22, 23, $\dots$, 26,
- celočíselné délky všech stran a
- navzájem různé jednociferné šířky. (Výšky mohou být libovolné.)

Příklad 3 (Malé systémy).

- (a) Má množinový systém $\mathcal{M}_4 = (\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\})$ tvořený všemi 3prvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d\}$ systém různých reprezentantů (SRR)?
- (b) Má množinový systém $\mathcal{M}_5$ tvořený všemi 3prvkovými podmnožinami množiny $\{a, b, c, d, e\}$ SRR?
- (c) Najděte systém $\mathcal{M}_6$ nějakých šesti 3prvkových podmnožin $\{a, b, c, d, e, f\}$, který nemá SRR.

Příklad 4 (Dvě verze). Rozmyslete si, že dvě verze Hallovy věty výše jsou ekvivalentní.

Příklad 5 (Regulární grafy). Ať $k \geq 1$ a G je k -regulární bipartitní graf (tj. každý vrchol má stupeň k).

- (a) Dokažte, že partity grafu G mají stejnou velikost.
- (b) Dokažte, že G má perfektní párování.
- (c) Dokažte, že hrany G lze obarvit k barvami tak, že hrany každé barvy tvoří perfektní párování.

Příklad 6 (Věže). Na políčkách šachovnice 8×8 stojí 24 věží tak, že v každém řádku i každém sloupci jsou právě 3. Dokažte, že lze poprohazovat řádky a sloupce tak, aby některých 8 věží bylo na diagonále.

Příklad 7 (Papíry). Máme dva čtvercové kusy papíru o obsahu 100. Každý z nich je nějak (libovolně) rozdělený na 100 útvarů o obsahu 1. Dokažte, že papíry můžeme položit přes sebe a propíchnout 100 špendlíky tak, aby každý útvar na každém papíru byl propíchnutý.

Příklad 8 (Latinské čtverce). Latinský čtverec řádu n je tabulka $n \times n$ vyplněná čísly $1, 2, \dots, n$ tak, že v každém řádku a každém sloupci se každé číslo vyskytuje jednou.

- (a) Dokažte, že pokud vyplníme první dva řádky čísly $1, 2, \dots, n$ tak, že se v řádcích ani sloupcích čísla (zatím) neopakují, pak můžeme dovyplnit i zbývající políčka tak, aby vznikl latinský čtverec.
- (b) Dokažte, že latinských čtverců řádu 30 je více než 10^{90} .

Nápověda: $n!$ za první řádek, $n!/e$ za druhy řádek (proč?), $(n-2)!$ za permutace zbylých.

Příklad 9 (Karty). Soupeř zamíchal standardní balíček 52 karet a rozdál karty do 13 hromádek po 4. Rádi bychom z každé hromádky vzali jednu kartu tak, abychom měli jedno eso, 2, 3, ..., krále. Jde to vždy provést?

Příklad 10 (Zákusky). Skupina $n \geq 3$ matfyzáků si v cukrárně objednala n různých zákusků. Až když je obsluha donesla, ukázalo se, že každý matfyzák je alergický na 2 zákusky (každý na jinou dvojici). Dokažte, že si matfyzáci mohou zákusky rozdělit tak, že každý dostane zákusek, na který není alergický.