

KG 1: Cvičení č.4

Irena Penev

24.10.2025

Projektivní roviny

Připomenutí: Necht X je konečná množina (“body”) a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ systém jejích podmnožin (“přímky”). Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

(A1) $(\forall x \neq y \in X)(\exists! P \in \mathcal{P}): x, y \in P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).

(A2) $(\forall P \neq Q \in \mathcal{P}): |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).

(A3) $(\exists C \subseteq X, |C| = 4): (\forall P \in \mathcal{P}): |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

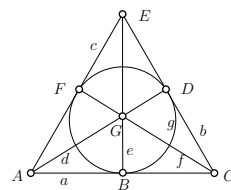
Lze dokázat, že každá konečná projektivní rovina $(X, \mathcal{P})$ má nějaký řád.

V rovině řádu n každý bod leží na právě $n+1$ přímkách a každá přímka obsahuje právě $n+1$ bodů.

Rovina řádu n obsahuje právě $n^2 + n + 1$ přímek a právě $n^2 + n + 1$ bodů.

Pokud je n mocnina prvočísla, pak existuje rovina řádu n .

Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:



Příklad 1 (Trpaslíci). *Sedm trpaslíků si plánuje pracovní týden. Každý ze 7 dní půjdou někteří 4 z nich do práce (těžit drahokamy) a zbylí 3 budou odpočívat a hrát při tom mariáš. Je možné rozplánovat týden tak, aby si každý dva trpaslíci spolu zahráli mariáš?*

Příklad 2 (Incidenční graf nemá krátké cykly). *Incidenční graf roviny $(X, \mathcal{P})$ je bipartitní graf G , který má vlevo vrcholy X , vpravo vrcholy $\mathcal{P}$ a mezi nimi všechny ty hrany (x, P) , kde $x \in P$. Dokažte, že G neobsahuje jako podgraf ani cyklus C_3 ani C_4 ani C_5 .*

Příklad 3 (Pokrytí). *Uvažme konečnou projektivní rovinu $(X, \mathcal{P})$ řádu n .*

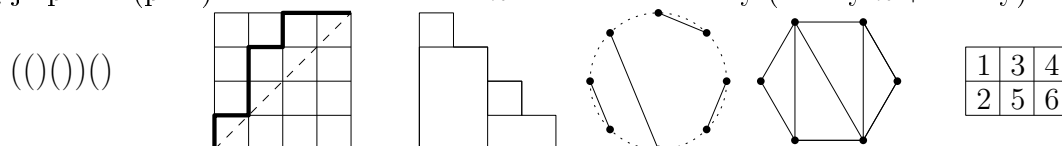
(a) *Kolik nejméně přímek z $\mathcal{P}$ musíme zvolit, aby každý prvek $x \in X$ ležel na aspoň jedné přímce?*

(b) *Kolik nejméně bodů z X musíme zvolit, aby na každé přímce $P \in \mathcal{P}$ ležel aspoň jeden vybraný bod?*

Příklad 4 (Axiom A3'). *Dokažte, že místo axiomu (A3) lze použít (A3'): “Existují aspoň 2 přímky, každá s aspoň 3 body” a stále budou sadě axiomů vyhovovat právě všechny konečné projektivní roviny. (Formálně (A3') říká $(\exists P \neq Q \in \mathcal{P}): |P|, |Q| \geq 3$.)*

Catalanova čísla

Připomenutí: Posloupnost $(1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots)$ Catalanových čísel je definována jako $c_0 = c_1 = 1$ a $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot c_{n-1-i}$ pro $n \geq 2$. Lze dokázat, že $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Lze dokázat, že c_n je počet (plně) binárních stromů s n vnitřními vrcholy (a tedy $n+1$ listy).



Příklad 5 (Catalanova čísla). *Vyjádřete následující počty pomocí Catalanových čísel:*

- (a) *Počet korektních uzávorkování pomocí n symbolů “(” a n symbolů “)”.*
- (b) *Počet cest v mřížce z bodu $[0, 0]$ do bodu $[n, n]$, které nikdy neklesnou pod diagonálu $y = x$.*
- (c) *Počet možností, jak rozdělit “schodiště” o $1+2+\dots+n$ políčkách na n pravoúhelníků.*
- (d) *Počet způsobů jak popárovat $2n$ bodů na kružnici n úsečkami, aby se žádné dvě úsečky neprotínaly.*
- (e) *Počet triangulací konvexního n -úhelníka.*
- (f) *Počet možností, jak do tabulky $2 \times n$ vyplnit čísla $1, 2, \dots, 2n$ tak, aby v každém řádku i sloupci čísla rostla.*
- (g) *(Bonus) Počet permutací množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ bez trojice $(..x..y..z..)$ takové, že $x < z < y$.*
- (h) *(Bonus) Počet permutací množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ bez trojice $(..x..y..z..)$ takové, že $x < y < z$.*