

KG 1: Cvičení č.3

Irena Penev

17.10.2025

Vytvořující funkce ještě jednou

Připomenutí: *Vytvořující funkci* posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$.

Zobecněná binomická věta. Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ položme $\binom{r}{0} = 1$ a $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Pak pro každé $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \dots,$$

Důsledek. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1+k}{n-1} x^k.$$

Příklady

Příklad 1 (Rozvíjení do řady). *Prozkoumejte důsledek zobecněné binomické věty:*

- (a) *Co se stane, když dosadíme $n = 2$? A $n = 3$?*
- (b) *Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(1, 2, 3, 4, \dots)$, tj. $b_k = k + 1$?*
- (c) *Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(2, 5, 8, 11, \dots)$, tj. $c_k = 3k + 2$?*
- (d) *Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \dots)$, tj. $d_k = (k+1)(k+2)$?*
- (e) *Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(1, 4, 9, 16, \dots)$, tj. $e_k = (k+1)^2$?*

Příklad 2. *Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):*

- (a) $(0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$,
- (c) $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, \dots)$,
- (b) $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$,
- (d) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$.

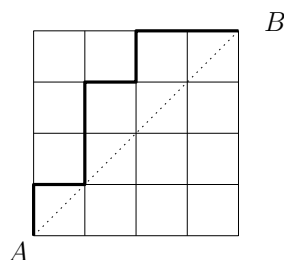
Příklad 3 (Vzorec pro n -tý člen). Najděte vzorec pro n -tý člen následujících rekurentně zadaných posloupností (můžete použít recept níže):

(a) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$

(b) $b_0 = 3, b_1 = 5, b_{n+1} = 3b_n - 4$

(c) $c_0 = 1, c_1 = 1, c_{n+2} = 1 + \sum_{k=0}^n c_k$

Příklad 4. Uvažme šachovnici $n \times n$ čtverečků:



Uvažujme cesty z bodu A do bodu B , které jdou po hranách čtverečků šachovnice a jsou nejkratší (tj. používají $2n$ hran). Ukažte, že cest, které nikdy nejdou pod diagonálu šachovnice (tj. přímku AB) je právě Catalanovo číslo $b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.¹

Nápověda: Cesta, která nikdy nejde pod diagonálu, kóduje binární strom s n vrcholy např. takto: rozdělte cestu na 2 části v bodě, kde poprvé dosáhne diagonály. Od první části odeberte první a poslední úsek, druhou nechte beze změny. Co teď?

Příklad 5 (Bonus: Rozklady). Označme postupně p_n, o_n, d_n počty rozkladů čísla n na přirozené sčítance, liché sčítance, a navzájem různé sčítance. Tj. např. $p_3 = 3$, protože $|\{3, 2+1, 1+1+1\}| = 3$, a $o_3 = d_3 = 2$. Označme $P(x), O(x), D(x)$ vytvořující funkce posloupností $(p_n)_{n \geq 0}, (o_n)_{n \geq 0}, (d_n)_{n \geq 0}$.

(a) Rozmyslete si, že platí

$$P(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots) \cdots (1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} \dots) \cdots$$

(b) Určete $O(x)$ a $D(x)$ a dokažte, že pro každé n platí $o_n = d_n$.

¹Např. pro $n = 3$, takových cest je 5:

