

KG 1: Cvičení 2

Irena Penev

10.10.2025

Některé užitečné řady

- (1) $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ pro $x \in \mathbb{R}$;
- (2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ pro $x \in \mathbb{R}$;
- (3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ pro $x \in \mathbb{R}$;
- (4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$ pro $x \in (-1, 1]$;
- (5) $(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots$ pro $x \in (-1, 1)$, kde α je pevné reálné číslo;¹
- (6) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ pro $x \in (-1, 1)$.

Vytvořující funkce

Připomenutí: Vytvořující funkce posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je mocninná řada $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Např. pro libovolné $x \in (-1, 1)$ platí $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$, takže vytvořující funkce posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ je $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$.

Příklad 1. Pro velmi malé kladné x sečtěte (tj. vyjádřete bez sumy a bez tří teček):

- (a) $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$
- (b) $\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \dots$
- (c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 + \dots$
- (d) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$
- (e) $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$
- (f) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{32} - \frac{x^6}{64} + \dots$

¹Definice: $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Příklad 2. Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):

(a) $(0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$,

(b) $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$,

(c) $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, \dots)$,

(d) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$.

Příklad 3. Předpokládejme, že posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ má vytvořující funkci $f(x)$.

(a) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(0, a_0, a_1, a_2, \dots)$?

(b) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, 0, 0, \dots)$?

(c) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$?

(d) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots)$?

(e) Jaká posloupnost má vytvořující funkci $f(-x)$?

(f) Jaká posloupnost má vytvořující funkci $f(2x)$?

(g) Jaká posloupnost má vytvořující funkci $f'(x)$?

Vzorec pro n -tý člen

Příklad 4. Najděte vzorec pro n -tý člen následujících rekurentně zadaných posloupností:

1. $a_0 = 2, a_1 = 5$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro $n \geq 0$.

2. $a_0 = 2, a_1 = 1$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ pro $n \geq 0$.

3. $a_0 = 3, a_1 = 5$ a $a_{n+1} = 3a_n - 4$ pro $n \geq 0$.

4. $a_0 = 1, a_1 = 9$ a $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ pro $n \geq 0$.