

KG 1: Cvičení 1

Irena Penev

3.10.2025

Kombinační čísla

Připomenutí: Kombinační číslo $\binom{n}{k}$, čteno „ n nad k “ (anglicky „ n choose k “) je zkrácený zápis za výraz

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

a vyjadřuje počet k -prvkových podmnožin množiny o n prvcích.

Příklad 1.

- (a) Závodu se účastnilo 10 běžců. Kolik je možností, jak můžou vypadat stupně vítězů?
- (b) Na táboře s 10 dětmi je potřeba určit trojčlennou noční hlídku. Kolik je možností?
- (c) Je dán konvexní 10-úhelník. Kolik trojúhelníků má všechny své vrcholy mezi vrcholy 10-úhelníku?

Příklad 2 (Kuličky). Z neomezené zásoby kuliček n různých barev jich chceme vybrat k . Kolik je možností, pokud kuličky:

- (a) musí mít různé barvy a dáváme je do řady?
- (b) mohou mít stejné barvy a dáváme je do řady?
- (c) musí mít různé barvy a dáváme je do pytle?
- (d) mohou mít stejné barvy a dáváme je do pytle?

Příklad 3. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Stars and bars

Připomenutí: Počet možností jak uspořádat s hvězdiček (typicky reprezentujících věci) a b oddělovačů (typicky reprezentujících hranice mezi přihrádkami) je $\binom{s+b}{b}$.

Příklad 4. Kolik řešení (a, b, c) má rovnice $a + b + c = 10$

- (a) v množině $\mathbb{N}_0$ nezáporných celých čísel?
- (b) v množině $\mathbb{N}$ kladných celých čísel?
- (c) v množině sudých kladných celých čísel?

Příklad 5.

- (a) Představme si, že roznásobíme výraz $(1 + x + x^2)^3$. Určete koeficienty u x a u x^2 .
- (b) Určete koeficient u x^7 v roznásobeném výrazu $(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})^{20}$,
- (c) Určete koeficient u x^{15} v roznásobeném výrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$,
- (d) Určete koeficient u x^{28} v roznásobeném výrazu $(x + x^3 + x^5 + \dots)^6$,
- (e) Určete koeficient u x^{17} v roznásobeném výrazu $(1 + x^2 + x^4 + \dots)^{10}$.

Asymptotické odhady

Připomenutí: Pro faktoriál platí $e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq en(\frac{n}{e})^n$. Přesnější (Stirlingův) odhad je $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

Pro kombinační číslo platí $(\frac{n}{k})^k \leq \binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k$. Pro prostřední kombinační číslo platí $\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$.

Příklad 6. Pro velmi velké n seřadte podle velikosti:

- (a) Počet všech funkcí $f: [n] \rightarrow [10]$.
- (b) Počet prostých funkcí $f: [n] \rightarrow [n]$.
- (c) Počet funkcí $f: [n] \rightarrow [n]$, kde každé $f(i)$ je násobkem 2.
- (d) Počet funkcí $f: [n] \rightarrow [n]$, kde každé $f(i)$ je násobkem 3.

Příklad 7. Pro velmi velké n seřadte následující výrazy podle velikosti:

$$1000n, \quad \frac{1}{2}n(n+1), \quad 1.1^n, \quad n\sqrt{n}, \quad n \log n.$$

Příklad 8. Pro velmi velké n seřadte následující výrazy podle velikosti:

$$\binom{2n}{n}, \quad \binom{2n}{5}, \quad n!, \quad n^n, \quad (\sqrt{n})^n, \quad n^{\sqrt{n}}, \quad n^5.$$

Rozhodněte, jaké z těchto funkcí rostou stejně nebo asymptoticky stejně rychle (symbolicky: $f(n) \sim g(n)$ nebo $f(n) = \Theta(g(n))$).