

Kombinatorika a grafy 1 (NDMI011)

Domácí úkol č.6

Irena Penev

Termín odevzdání: neděle 18. 1. 2026 ve 13:00. Odevzdejte v Sovičce ve formátu PDF.

Poznámka: Odevzdáte-li domácí úkol nejpozději do neděle 11. 1. 2026 ve 13:00, bude ohodnocen tentýž den (tj. 11. 1. 2026).

Definice. Δ -systém je množina $\mathcal{M}$ množin taková, že každé dvě různé množiny z $\mathcal{M}$ mají stejný průnik.¹

Příklad 1 (5 bodů). Nechť k je nezáporné celé číslo a nechť $\mathcal{A}$ je nekonečná množina množin kardinality k . Dokažte, že $\mathcal{A}$ obsahuje nekonečný Δ -systém jako podmnožinu.

Nápověda: Dokažte nejdříve (pomocí nekonečné Ramseyovy věty), že existuje nekonečná množina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ taková, že každé dvě množiny z množiny $\mathcal{B}$ mají průnik stejné kardinality.

Příklad 2 (5 bodů). Nechť $n, t \in \mathbb{N}$ ($t \geq 2$). Dokažte, že každý graf na nejvýše n vrcholech, neobsahující úplný bipartitní graf $K_{2,t}$ jako podgraf, má nejvíce $\frac{1}{2}(n + n^{3/2}\sqrt{t-1})$ hran.

Nápověda: Adaptujte důkaz Theorem 6.2.1 ze skript. (Poznámka: $C_4 = K_{2,2}$.)

¹Přesněji: Δ -systém je množina $\mathcal{M}$ množin taková, že existuje množina K taková, že pro každé $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ takové, že $M_1 \neq M_2$, platí $M_1 \cap M_2 = K$.