

Kombinatorika a grafy 1 (NDMI011)

Domácí úkol č.2

Irena Penev

Termín odevzdání: sobota 1. 11. 2025 ve 13:00. Odevzdejte v Sovičce ve formátu PDF.

Definice. Nechť X je konečná množina (“body”) a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ systém jejích podmnožin (“přímky”). Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme konečnou projektivní rovinou, pokud splňuje následující axiomy:

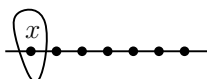
- (A1) $(\forall x \neq y \in X)(\exists! P \in \mathcal{P}): x, y \in P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).
- (A2) $(\forall P \neq Q \in \mathcal{P}): |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).
- (A3) $(\exists C \subseteq X, |C| = 4): (\forall P \in \mathcal{P}): |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

Příklad 1 (5 bodů). Nechť X je konečná množina a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ systém jejích podmnožin. Předpokládejme, že $|X| \geq 3$, a zároveň, že $(X, \mathcal{P})$ splňuje axiomy (A1) a (A2), ale **nesplňuje** axiom (A3). Dokažte, že platí jedno z následujících tvrzení:

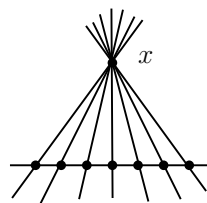
- (1) $\mathcal{P} = \{X\}$ (tj. existuje právě jedna přímka, a tato přímka obsahuje všechny body);
- (2) $(\exists x \in X): \mathcal{P} = \{X, \{x\}\}$ (tj. existují právě dvě přímky; jedna obsahuje všechny body a druhá obsahuje právě jeden bod);
- (3) $(\exists x \in X): \mathcal{P} = \{X \setminus \{x\}\} \cup \{\{x, y\} \mid y \in X \setminus \{x\}\}$



(1)



(2)



(3)

Příklad 2 (5 bodů). *Dokažte, že počet permutací množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ bez trojice $(\dots x \dots y \dots z \dots)$ takové, že $x < z < y$, je roven $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{2}$.*

Nápověda: *Rozdělte permutaci $\dots, n, \dots$ na části nalevo od n a napravo od n .*