

# Kombinatorika a grafy 1 (NDMI011)

## Cvičení 13

Irena Penev

**Definice.** Abeceda  $\Sigma$  je konečná množina  $q$  symbolů. Slovo délky  $n$  je uspořádaná  $n$ -tice symbolů. Jako  $\Sigma^n$  označíme množinu slov délky  $n$ . Hammingova vzdálenost slov  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \Sigma^n$  je definována jako  $d(x, y) = |\{i \in \{1, \dots, n\} \mid x_i \neq y_i\}|$ . (Blokový) kód je množina  $C \subseteq \Sigma^n$  takzvaných kódových slov. Parametry kódu  $C$  jsou  $(n, k, d)_q$ , kde  $k = \log_q |C|$  a  $d = \min\{d(x, y) \mid x, y \in C, x \neq y\}$ .

**Definice.** Lineární kód  $C$  je podprostorem vektorového prostoru  $F_q^n$ , kde  $F_q$  je konečné těleso velikosti  $q$ . Nechť  $C$  je lineární kód s parametry  $[n, k, d]_q$ . Duálním kódem  $C$  je kód  $C^\perp = \{y \in F_q^n \mid \langle x, y \rangle = 0 \forall x \in C\}$ , kde pro  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in F_q^n$  je  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

**Příklad 1.** Nechť  $C$  je kód s parametry  $(n, k, 2t + 1)_2$  nad abecedou  $\{0, 1\}$ . Rozhodněte, jaké jsou parametry kódu  $C'$ , který z  $C$  vznikne prodloužením každého kódového slova o jeden symbol určující paritu počtu jedniček v daném slově.

**Příklad 2.** Uvažme kód obsahující všechna slova délky  $n \geq 2$  nad  $\{0, 1\}$  sudé váhy, neboli  $C = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in F_2^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$ . Určete parametry tohoto kódu, ověřte, že je lineární a určete jeho duální kód  $C^\perp$ .

**Příklad 3.** Mějme 5-znakovou abecedu (třeba  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ). Chceme kódovat všechny dvojice symbolů. Chceme 25 slov takových, že začínají všemi kombinacemi prvních dvou symbolů. Navrhněte kód délky 5, s tou vlastností, že z každé dvojice pozic lze rekonstruovat celé slovo. Určete parametry kódu.

**Příklad 4.** Mějme 3-znakovou abecedu (třeba  $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ ).

- Ukažte, že pokud kód  $C \subseteq \Sigma^4$  opravuje jednu chybu (jednu jakkoliv změněnou pozici), potom obsahuje nejvýše 9 slov.
- Navrhněte kód  $C \subseteq \Sigma^4$  rozpoznávající jednu chybu s alespoň 20-ti kódovými slovy.