Kombinatorika a grafy 1 (NDMI011)
Cvičení 12

Irena Penev

Kőnigovo lemma. *V každém zakořeněném stromě, který má nekonečně mnoho vrcholů ale jen konečné stupně existuje nekonečná cesta začínající v kořeni.*

Důkaz. Nechť (T, r) je zakořeněný strom, který má nekonečně mnoho vrcholů, ale jen konečné stupně. Posloupnost $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ vrcholů stromu T definujeme rekurzivně takto. Buď $x_0 := r$. Graf T je souvislý (protože je strom), tedy pro každý vrchol $v \in V(T)$ existuje cesta mezi x_0 a v. T má nekonečně mnoho vrcholů, z čehož plyne, že ve stromu T existuje nekonečně mnoho konečných cest, začínajících ve vrcholu x_0. Předpokládejme nyní (rekurzivně), že $x_0, \dots, x_i$ je cesta ve stromu T taková, že $x_0 = r$ a existuje nekonečně mnoho konečných cest, začínajících podcestou $x_0, \dots, x_i$. Vrchol x_i má jen konečně mnoho sousedů, tedy existuje nějaký vrchol x_{i+1} (sousední s x_i) takový, že existuje nekonečně mnoho konečných cest, začínajících podcestou $x_0, \dots, x_i, x_{i+1}$. Nyní jsme definovali posloupnost $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, a vidíme, že $x_0, x_1, x_2, \dots$ je nekonečná cesta začínající v kořeni. $\square$

Schurova věta. *Pro každé $k \in \mathbb{N}$, existuje $N \in \mathbb{N}$, takové že pro každé k-obarvení množiny $\{1, \dots, N\}$, existují $x, y, z \in \{1, \dots, N\}$ takové, že x, y, z mají stejnou barvu a platí $x + y = z$.*

Příklad 3 z Cvičení 11. *Dokažte Schurovu větu. (**Nápověda:** Obarvěte hrany grafu K_N, kde $N = R_2(\underbrace{3, \dots, 3}_{k})$.)*

Příklad 4 z Cvičení 11.

(c) *Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo $DM(n)$ takové, že každá $\{0, 1\}$-matice s rozměry $DM(n) \times DM(n)$ obsahuje $n \times n$ diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále totožné, všechny prvky nad diagonálou totožné a také všechny prvky pod diagonálou totožné.*

Definice. Δ-systém *je množina $\mathcal{M}$ množin taková, že každé dvě různé množiny z $\mathcal{M}$ mají stejný průnik.*[1]

Příklad 1. *Nechť k je nezáporné celé číslo a nechť $\mathcal{A}$ je nekonečná množina množin kardinality k. Dokažte, že $\mathcal{A}$ obsahuje nekonečný Δ-systém jako podmnožinu.*

> ***Nápověda:*** *Dokažte nejdřív, že existuje nekonečná množina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ taková, že každé dvě množiny množiny $\mathcal{B}$ mají průnik stejné kardinality.*

Příklad 2. *Dokažte, že pro každé přirozené číslo t platí*

$$2^t \quad < \quad R_2(\underbrace{3,\ldots,3}_{t}) \quad \leq \quad 3t!$$

*(**Nápověda:** Indukce vzhledem k t.)*

[1] Přesněji: Δ-*systém* je množina $\mathcal{M}$ množin taková, že existuje množina K taková, že pro každé $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ takové, že $M_1 \neq M_2$, platí $M_1 \cap M_2 = K$.