

# Kombinatorika a grafy 1 (NDMI011)

## Cvičení 11

Irena Penev

**Příklad 1.** Dokažte, že pro každé  $k, \ell \in \mathbb{N}$ , existuje  $N \in \mathbb{N}$  takové, že každá posloupnost přirozených čísel obsahuje neklesající podposloupnost délky  $k$  nebo nerostoucí podposloupnost délky  $\ell$ .

**Příklad 2.**

(a) Nechť  $G$  je graf takový, že  $|V(G)| \geq 8$ . Dokažte, že  $G$  nebo  $\overline{G}$  obsahuje  $C_4$  jako podgraf.

(b) Nalezněte nejmenší  $n \in \mathbb{N}$  takové, že pro každý graf  $G$  takový, že  $|V(G)| \geq n$ , platí, že  $G$  nebo  $\overline{G}$  obsahuje  $C_4$  jako podgraf. (Pozor:  $n \neq 8$ .)

**Schurova věta.** Pro každé  $k \in \mathbb{N}$ , existuje  $N \in \mathbb{N}$ , takové že pro každé  $k$ -obarvení množiny  $\{1, \dots, N\}$ , existují  $x, y, z \in \{1, \dots, N\}$  takové, že  $x, y, z$  mají stejnou barvu a platí  $x + y = z$ .

**Příklad 3.** Dokažte Schurovu větu. (**Nápověda:** Obarvěte hrany grafu  $K_N$ , kde  $N = R_2(\underbrace{3, \dots, 3}_k)$ .)

**Příklad 4.**

(a) Ukažte, že pro každé přirozené číslo  $n$  existuje přirozené číslo  $M(n)$  takové, že každá  $\{0, 1\}$ -matice s rozměry  $M(n) \times M(n)$  obsahuje  $n \times n$  podmatici, která obsahuje buď jen nuly nebo jen jedničky.

(b) Sestrojte libovolně velkou  $\{0, 1\}$ -matici, která neobsahuje  $2 \times 2$  matici se samými jedničkami a ani  $2 \times 2$  matici se samými nulami jako diagonální podmatici. Matice  $A$  o rozměrech  $n \times n$  je diagonální podmaticí matice  $B$  o rozměrech  $N \times N$ , pokud existuje  $R \subseteq \{1, \dots, N\}$ ,  $|R| = n$ , taková, že vybraním řádků a sloupců matice  $B$  s indexy z  $R$  získáme matici  $A$ .

(c) Ukažte, že pro každé přirozené číslo  $n$  existuje přirozené číslo  $DM(n)$  takové, že každá  $\{0, 1\}$ -matice s rozměry  $DM(n) \times DM(n)$  obsahuje  $n \times n$  diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále totožné, všechny prvky nad diagonálou totožné a také všechny prvky pod diagonálou totožné.