Kombinatorika a grafy 1 (NDMI011)
Cvičení 10

Irena Penev

Příklad 1. *Určete nejmenší N takové, že v každém červeno-modrém obarvení hran K_N najdeme buď modrou kopii $K_{1,3}$ nebo červenou kopii K_3.*

Příklad 2. *Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:*

(a) *Obarvíme-li dostatečně velký úplný graf se smyčkami dvěma barvami (barvíme hrany a smyčky), vždy existuje jednobarevný úplný podgraf se smyčkami na n vrcholech.*

(b) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo doplněk G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf.*

(c) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolný graf G na N vrcholech platí: buď G obsahuje $K_{n,n}$ jako podgraf nebo G obsahuje doplněk $K_{n,n}$ jako podgraf.*

(d) *Pro každý graf G existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že v libovolném 2-obarvení hran K_N najdeme jednobarevnou G jako indukovaný podgraf.*

Příklad 3. *Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každý graf $G = (V, E)$ s alespoň n vrcholy a každé jeho 2-obarvení hran existuje $U \subseteq V$ velikosti alespoň k taková, že všechny hrany indukovaného podgrafu $G[U]$ mají stejnou barvu.*

Příklad 4. *Řekněme, že systém $\mathcal{N}$ podmnožin X je* polonezávislý, *neobsahuje-li žádné* 3 *množiny A, B, C takové, že $A \subsetneq B \subsetneq C$.*

(a) *Podobnou metodou jako v důkazu Spernerovy věty dokažte, že $|\mathcal{N}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, kde $n = |X|$.*

(b) *Ukažte, že pro liché n odhad z (a) nelze zlepšit.*