# Kombinatorika a grafy 1 (NDMI011)
# Cvičení 6

Irena Penev

**Definice.** *Nechť $X$ je nějaká konečná množina, a nechť $\mathcal{P}$ je system podmnožin množiny $X$. Dvojice $(X, \mathcal{P})$ se nazývá* konečná projektivní rovina, *pokud splňuje následující axiomy:*

*(P0) Existuje čtyrbodová množina $Q \subseteq X$ taková, že $|P \cap Q| \leq 2$ pro každou množinu $P \in \mathcal{P}$.*

*(P1) Každé dvě různé množiny $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ se protínají právě v jednom bodě, tj. $|P_1 \cap P_2| = 1$.*

*(P2) Pro každé dva růyné body $x_1, x_2 \in X$ existuje právě jedna množina $P \in \mathcal{P}$ taková, že $x_1 \in P$ a $x_2 \in P$.*

*Je-li $(X, \mathcal{P})$ konečná projektivní rovina, budeme prvkům $X$ říkat* body *a množinám z $\mathcal{P}$* přímky.

**Příklad 1.** *Nechť $X$ je konečná množina a $\mathcal{P}$ system jejích podmnožin, splňující podminky (P1), (P2) a nasledující (P0'):*

> *(P0') Existují aspoň 2 různé přímky $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, z nichž každá má aspoň 3 body.*

*Dokažte, že potom $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní množina.*

**Příklad 2.** *Nechť $n \geq 2$ a $X$ je množina s $n^2 + n + 1$ prvky a $\mathcal{P}$ je system tvořený $n^2 + n + 1$ jejími $(n + 1)$-prvkovými podmnožinami, z nichž každé 2 se protínají nejvýš v jednom bodě.*

*(a) Dokažte, že každá dvojce bodů z $X$ je obsažena v právě jedné množině z $\mathcal{P}$.*

*(b) Dokažte, že každým bodem prochází nejvýš $n + 1$ množin.*

*(c) Dokažte, že každým bodem prochází právě $n + 1$ množin.*

*(d) Dokažte, že každé 2 množiny z $\mathcal{P}$ se protínají.*

*(e) Ověrte, že $(X, \mathcal{P})$ je projektivní rovina řádu $n$.*