Kombinatorika a grafy 1 (NDMI011)
Cvičení 2

Irena Penev

Příklad 1. *Dokažte, že pro každé celé číslo $n \geq 0$, platí*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Definice. *Pro nezáporná celá čísla $n, k_1, \dots, k_r$, taková že $k_1 + \cdots + k_r = n$, definujeme* multinomický koeficient

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} := \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}.$$

Multinomický koeficient se (kombinatoricky) dá interpretovat takto: počet rozdělení n rozlišitelných předmětů do r rozlišitelných krabic, takovým způsobem, že v krabici i ($1 \leq i \leq r$) máme k_i předmětů ($k_1 + \cdots + k_r = n$) je roven $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$.

Příklad 2. *Uvažme náhodnou procházku v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ začínající v počátku, kde se v každém kroku rozhodneme náhodně uniformně nezávisle, zda budeme pokračovat doleva, doprava, nahoru, či dolů. Nechť je u_m počet takových cest délky $2m$, končících v počátku.*

(a) Najděte vzorec pro u_m. (Měli byste dostat nějaký vzorec s multinomickými koeficienty.)

(b) Pomocí (a), dokažte, že $u_m = \binom{2m}{m}^2$. (Také by vám mohl pomoct vzorec z Příkladu 1.)

(c) Předpokládejme nyní, že je naše cesta nekonečná. Dokažte, že střední hodnota počtů návratů do počátku roste do nekonečna.

Příklad 3. *Dokažte nebo vyvraťte: pro libovolné kladné, neklesající funkce $f(n)$ a $g(n)$, platí $f(n) = O(g(n))$ či $g(n) = O(f(n))$.*

Příklad 4. *Srovnejte následující výrazy podle velikosti (předpokládejte, že n je velmi velké číslo):*

$$\binom{2n}{n-1}, \quad \binom{2n}{n}, \quad \binom{2n}{10}, \quad n!, \quad n^{\sqrt{n}}, \quad (\sqrt{n})^n$$

Rozhodněte, jaké z těchto funkcí rostou stejně či asymptoticky stejně rychle (symbolicky: $f(n) \sim g(n)$ či $f(n) = \Theta(g(n))$).