Kombinatorika a grafy 1 (NDMI011)
Cvičení 1: Asymptotické počítaní. Faktoriály a kombinační čísla. Základy teorie grafů

Irena Penev

1 Asymptotické počítaní

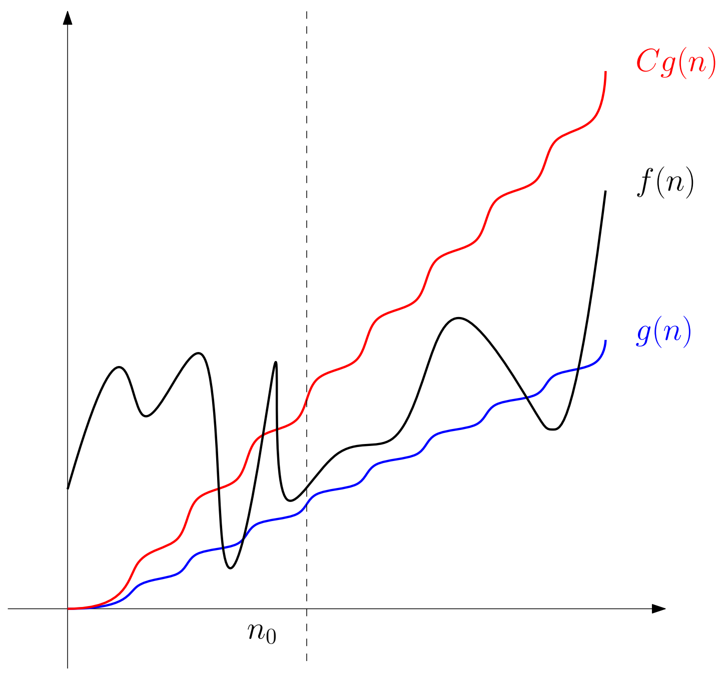
Nechť $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou funkce, přičemž zpravidla předpokládáme, že hodnoty f, g jsou nezáporné. Zápis

$$f(n) = O(g(n))$$

znamená, že existují konstanty $n_0 \in \mathbb{N}$ a $C \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|f(n)| \leq Cg(n).$$

To znamená, že f neroste podstatně rychleji než g, neboli že $\frac{f(n)}{g(n)}$ neroste do nekonečna.



Příklad 1.1.

1. $10n^2 + 5 = O(n^2)$;
2. $\ln n + 5 = O(n)$;
3. $n\sqrt{n} = O(n^2)$.

Poznámka: $f(n) = g(n) + O(h(h))$ znamená, že $f(n) - g(n) = O(h(n))$. Jinými slovy, f roste stejně rychle jako g, až na „chybu"řádu h.

Příklad 1.2. $\underbrace{\binom{n}{2}}_{=\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{n^2}{2} + O(n)$

V literatuře se běžně vyskytují zápisy jako v následující tabulce.

zápis	význam
$O(1)$	konstantní funkce (nebo funkce omezená shora konstantou)
$O(\log n)$	logaritmická (nebo sublogaritmická) funkce
$O(n)$	lineární (nebo sublineární) funkce
$O(n^2)$	kvadratická (nebo subkvadratická) funkce
$O(n^3)$	kubická (nebo subkubická) funkce
$n^{O(1)}$	polynomiální funkce (nebo funkce omezená shora polynomiální funkcí)
$2^{O(n)}$	exponenciální (nebo subexponenciální) funkce

Jiné zápisy:

zápis	význam
$f(n) = O(g(n))$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}$ t.ž. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \implies \lvert f(n)\rvert \leq Cg(n)$
$f(n) = o(g(n))$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
$f(n) = \Omega(g(n))$	$g(n) = O(f(n))$
$f(n) = \Theta(g(n))$	$f(n) = O(g(n))$ & $f(n) = \Omega(g(n))$
$f(n) \sim g(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$

Cvičení 1.3. *Rozhodněte, zda jsou následující zápisy pravdivé:*

1. $n^2 = O(n^2 \ln n)$
2. $n^2 = \Theta(n^2 \ln n)$
3. $n^2 = o(n^2 \ln n)$
4. $n^2 + 5 \ln n = n^2(1 + o(1)) \sim n^2$
5. $n^2 + 5n \ln n = n^2 + O(n)$

2 Faktoriály a kombinační čísla

2.1 Faktoriály

Kolik způsobů existuje uspořádat prvky n-prvkové ($n \geq 1$) množiny? První prvek můžeme vybrat n způsoby, druhý prvek - $n-1$ způsoby, třetí prvek - $n-2$ způsoby atd. Tedy existuje

$$\begin{array}{ccccccc} n & \cdot & (n-1) & \cdot & \dots & \cdot & 1 \\ \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow \\ \text{první} & & \text{druhý} & & & & n\text{-tý} \\ \text{prvek} & & \text{prvek} & & & & \text{prvek} \end{array}$$

způsobů uspořádat prvky n-prvkové množiny. Tento součin se nazývá n *faktoriál*, a označuje se $n!$. Je tedy:

$$n! \quad = \quad \prod_{k=1}^{n} k$$

Také definujeme $0! := 1$.

Tedy je $n!$ počet permutací n-prvkové množiny.

2.2 Kombinační čísla

Nechť X je množina a k nezáporné celé číslo. Symbolem

$$\binom{X}{k}$$

budeme značit množinu všech k-prvkových podmnožin množiny X.

Příklad 2.1. $\binom{\{1,2,3\}}{2} = \Big\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\Big\}$.

Množina $\binom{X}{k}$ je definovaná pro každou množinu X, bez ohledu na to, zda je množina X konečná nebo nekonečná.

Nechť je nyní X konečná množina, $n := |X|$. Kolik prvků má množina $\binom{X}{k}$ (pro $0 \leq k \leq n$)? Platí:

$$\begin{array}{ccccc} \#\text{ způsobů uspořádat} & & \#\ k\text{-prvkových} & & \#\text{ způsobů uspořádat} \\ k\text{ různých prvků} & = & \text{podmnožin} & \times & k\text{-prvkovou} \\ \text{množiny } X & & \text{množiny } X & & \text{množiny } X \end{array}$$

z čehož plyne

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \quad = \quad |\tbinom{X}{k}| \cdot k!,$$

neboli

$$|\tbinom{X}{k}| \quad = \quad \tfrac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Tato rovnice stejně platí pro $0 \leq n < k$: v takovémto případě je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny X roven 0.

Pro celá nezáporná čísla k a n, *kombinační číslo* (nebo *binomický koeficient*) $\binom{n}{k}$ je definované takto:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Máme tehdy, že je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny roven kombinačnímu číslu $\binom{n}{k}$.

Vidíme, že pro celá čísla n, k taková že $n \geq k \geq 0$, platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

z čehož plyne, že

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Tvrzení 2.2. *Pro celá čísla k, n taková že $0 \leq k \leq n$, platí:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

□

Pascalův trojúhelník (viz. níže) je geometrické uspořádání binomických koeficientů do tvaru trojúhelníku: každý binomický koeficient je součtem dvou binomických koeficientů nad sebou (jako ve Tvrzení 2.2).

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Zde také připomínáme Binomickou větu.

Binomická věta. $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Binomickou větu lze snadno dokázat matematickou indukcí. Také existuje (zajímavější) kombinatorická interpretace. Koeficient pred $x^{n-k}y^k$ se rovná počtů způsobů vybrat $n-k$ ze n závorek ze součinu $(x+y)^n$ (viz. níže). Z těchto $n-k$ závorek si vybereme x, a z ostatních k si vybereme y (takovým způsobem dostáváme $x^{n-k}y^k$ ze součtu). Počet takových výběrů je $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & (x+y) & \cdot & (x+y) & \cdot & (x+y) & \cdot & \dots & \cdot & (x+y) & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & \\
\Big\{ & 1 & , & 2 & , & 3 & , & \dots & , & n & \Big\}
\end{array}
$$

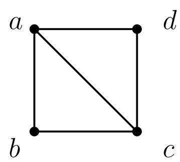
Cvičení 2.3. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \ ?$

3 Základy teorie grafů

Graf je uspořádaná dvojice $G = (V(G), E(G))$, kde je $V(G)$ neprázdná konečná množina a $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$. Prvky množiny $V(G)$ se jmenují *vrcholy* (nebo *uzly*) grafu G a prvky množiny $E(G)$ se jmenují *hrany* grafu G.[1]

Pro hranu $\{u, v\}$ se běžně používá zkrátka uv. Vrcholy u a v jsou *sousední* v grafu G, jestliže uv je hrana grafu G. Vrcholy u a v nazýváme *koncové vrcholy* hrany uv a říkáme, že vrcholy u a v jsou s hranou uv incidentní.

Níže je zobrazen graf, jehož množina vrcholů je $\{a, b, c, d\}$ a množina hran je $\{ab, ac, ad, bc, cd\}$.



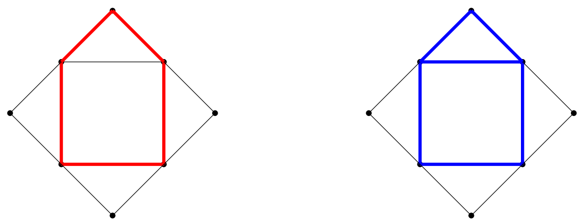
Stupeň vrcholu u je počet hran, se kterými je vrchol u incidentní.[2] Stupeň vrcholu u v grafu G se značí $d_G(u)$ nebo $\deg_G(u)$.

Podgraf grafu $G = (V(G), E(G))$ je graf $H = (V(H), E(H))$ takový že platí $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$.[3] Podgraf H grafu G je *indukovaný*, jestliže platí $E(H) = \binom{V(H)}{2} \cap E(G)$.

[1] Přesněji, to čemu zde říkáme „graf"je (konečný) obyčejný neorientovaný graf. Existují další pojmy grafů, ale zde je nebudeme probírat.

[2] Ekvivalentně (alespoň pro „prosté"grafy), *stupeň* vrcholu u je počet vrcholů, které jsou s u sousední.

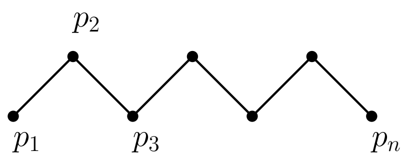
[3] Pozor: samé H musí být graf. Takhle platí $E(H) \subseteq \binom{V(H)}{2} \cap E(G)$.



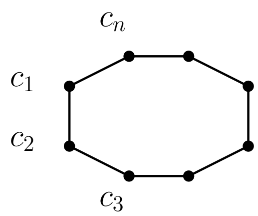
podgraf   indukovaný podgraf

3.1 Některé důležité grafy

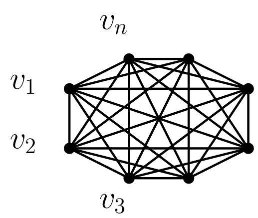
- *Cesta* P_n.



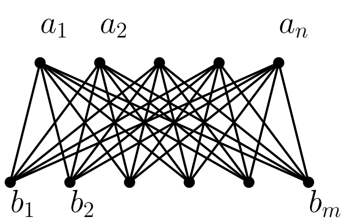
- *Cyklus* (nebo *kružnice*) C_n.



- *Kompletní* (nebo *úplný*) graf K_n.



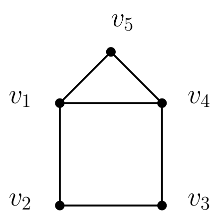
- *Kompletní bipartitní* (*úplný bipartitní*) graf $K_{n,m}$.



3.2 Souvislé grafy a komponenty

Sled v grafu je posloupnost vrcholů taková, že mezi každými dvěma po sobě jdoucími je hrana. *Tah* v grafu je sled, ve kterém se neopakují hrany. *Cesta* je sled, ve kterém se neopakují vrcholy, tedy každý vrchol se v cestě objevuje nejvýše jednou. Existuje-li mezi dvěma vrcholy v grafu existuje sled, pak mezi nimi také existuje cesta: nejkratší tah mezi vrcholy u a v je nutně cesta.

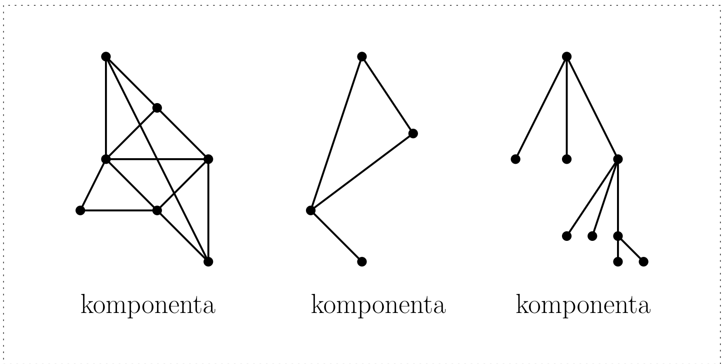
Příklad 3.1. *V grafu G (viz. níže) máme například následující sledy, tahy a cesty:*



G

- $v_1, v_2, v_3, v_2, v_3, v_4$ *je sled (ale není tah);*
- $v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_5, v_4$ *je tah (ale není cesta);*
- v_1, v_2, v_3 *je cesta.*

Graf je *souvislý*, jestliže mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta; v opačném případě je graf *nesouvislý*. *Komponenta grafu* je jeho maximální souvislý podgraf.



nesouvislý graf

Komplement (nebo *doplněk*) grafu G je graf $\overline{G}$, jehož množina vrcholů je $V(\overline{G}) = V(G)$ a množina hran je $E(\overline{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$. Takhle komplement grafu G má stejné vrcholy jako G, a mezi vrcholy jsou přesně ty hrany, které chybí v původním grafu G.

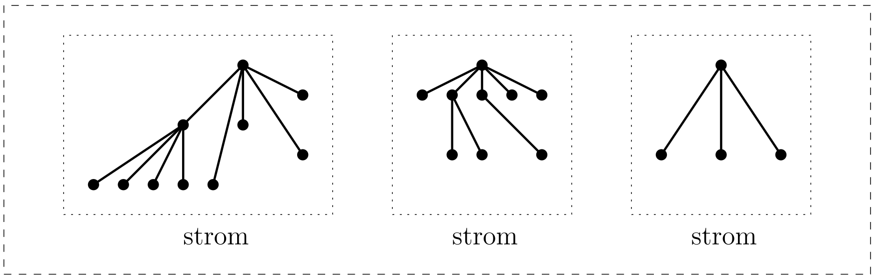
G $\qquad\qquad$ $\overline{G}$

Tvrzení 3.2. *Pro každý graf G, alespoň jeden z grafů $G, \overline{G}$ je souvislý.*

Důkaz. Nechť je G libovolný graf. Předpokládejme, že G je nesouvislý (jinak je důkaz hotov). Pak G má alespoň dvě komponenty. Nechť jsou u a v vrcholy grafu $\overline{G}$. Jestliže $u = v$, pak je u (jednovrcholová) cesta mezi u a v v grafu $\overline{G}$. Jestliže jsou u a v různé vrcholy, patřící do stejné komponenty grafu G, pak pro libovolný vrchol w, který patří do nějaké jiné komponenty grafu G, platí, že je u, w, v cesta mezi u a v ve grafu $\overline{G}$. Předpokládejme nyní, že u a v patří do různých komponent grafu G. Pak jsou u a v sousední v grafu $\overline{G}$, a tedy je u, v cesta mezi u a v v grafu $\overline{G}$. Dokázali jsme, že je $\overline{G}$ souvislý. □

3.3 Stromy

Les je graf který neobsahuje (jako podgraf) žádný cyklus. *Strom* je souvislý les.



les

List je vrchol stupně 1.

Věta 3.3. *Každý strom s více než jedním vrcholem má alespoň dva listy.*

Důkaz. Nechť T je strom s více než jedním vrcholem. Vzhledem k tomu, že je T souvislý a má alespoň dva vrcholy, T obsahuje cestu délky 2. Nechť je teď $u_1, u_2, \ldots, u_t$ nejdelší cesta ve stromu T. (Vidíme, že $t \geq 2$, a tedy $u_1 \neq u_t$.)

Dokážeme, že jsou u_1 a u_t listy. Stačí to ukázat pro vrchol u_1 (důkaz pro u_t je analogický). Vrchol u_1 je sousední se vrcholem u_2, a tedy $d_G(u) \geq 1$. Je-li u_1 sousední s alespoň jedním z vrcholů $u_3, \ldots, u_t$, pak pro minimální index $i \in \{3, \ldots, t\}$, takový že $u_1 u_i \in E(T)$, platí, že je $u_1, u_2, \ldots, u_i, u_1$ cyklus ve stromu T, což je ve sporu s definicí stromu. Je-li u_1 sousední s nějakým vrcholem $v \in V(T) \setminus \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$, pak je cesta $v, u_1, u_2, \ldots, u_t$ delší než cesta $u_1, u_2, \ldots, u_t$, a opět jsme došli ke sporu. Dokázali jsme, že je u_2 jediný soused vrcholu u_1, a tedy je u_1 list stromu T. $\square$

Tvrzení 3.4. *Nechť v je list ve stromu T. Potom je $T \setminus v$ strom.*[4]

Důkaz. Snadné! (Proč?) $\square$

Věty o stromech se nejčastěji dokazují matematickou indukcí vzhledem k počtu vrcholů, přičemž se v indukčním kroku vymazuje jeden list (a dostává se menší strom). Máme například následující větu.

Věta 3.5. *Pro každý strom T platí $|E(T)| = |V(T)| - 1$.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí vzhledem k počtu vrcholů stromu.

Má-li strom T jenom jeden vrchol, pak T nemá žádnou hranu, a platí $|E(T)| = 0 = 1 - 1 = |V(T)| - 1$.

Předpokládejme nyní že tvrzení platí pro všechny stromy, které mají n vrcholů, a nechť je T strom, který má $n + 1$ vrcholů. Podle Věty 3.3, T má list v. Podle Tvrzení 3.4, $T \setminus v$ je strom. Nyní platí

$$\begin{aligned} |E(T)| &= |E(T \setminus v)| + 1 && v \text{ je list} \\ &= |V(T \setminus v)| && \text{dle indukčního předpokladu} \\ &= |V(T)| - 1, \end{aligned}$$

a důkaz je hotov. $\square$

[4] $T \setminus v$ je graf, jehož množina vrcholů je $V(G) \setminus \{v\}$ a množina hran je $\{e \in E(G) \mid v \notin e\}$. To znamená, že dostáváme graf $T \setminus v$ vymazáním vrcholů v a všech hran, incidentních s v.

T $\qquad$ $T \setminus v$