

Kombinatorika a grafy 1 (NDMI011)

Domácí úkol 8

Irena Penev

Termín odevzdání: středa, 05.01.2022, 14h. Přinést na cvičení nebo poslat e-mailem (ipenev@iuuk.mff.cuni.cz).

Definice. Δ -systém je množina \mathcal{M} množin taková, že každé dvě různé množiny z \mathcal{M} mají stejný průnik.¹

Příklad 1 (50 bodů). Necht k je nezáporné celé číslo a necht \mathcal{A} je nekonečná množina množin kardinality k . Dokažte, že \mathcal{A} obsahuje nekonečný Δ -systém jako podmnožinu.

Nápověda: Dokažte nejdřív (pomocí nekonečné Ramseyovy věty), že existuje nekonečná množina $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ taková, že každé dvě množiny množiny \mathcal{B} mají průnik stejné kardinality.

Příklad 2 (50 bodů). Dokažte, že pro každé přirozené číslo t platí

$$2^t < R_2(\underbrace{3, \dots, 3}_t) \leq 3t!$$

(**Nápověda:** Indukce vzhledem k t .)

¹Přesněji: Δ -systém je množina \mathcal{M} množin taková, že existuje množina K taková, že pro každé $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ takové, že $M_1 \neq M_2$, platí $M_1 \cap M_2 = K$.