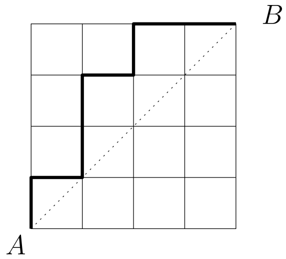
Kombinatorika a grafy 1 (NDMI011)
Domácí úkol 3

Irena Penev

Termín odevzdání: středa, 10.11.2021, 14h. Poslat e-mailem (ipenev@iuuk.mff.cuni.cz).

Příklad 1 (50 bodů). *Uvažme šachovnici $n \times n$ čtverečků:*



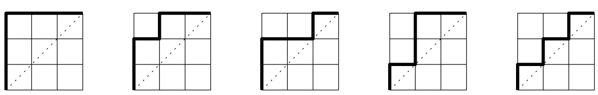
Uvažujme cesty z bodu A do bodu B, které jdou po hranách čtverečků šachovnice a jsou nejkratší (tj. používají $2n$ hran). Ukažte, že cest, které nikdy nejdou pod diagonálu šachovnice (tj. přímku AB) je právě Catalanovo číslo $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.[1]

> ***Nápověda:*** *Cesta, která nikdy nejde pod diagonálu, kóduje binární strom s n vrcholy např. takto: rozdělte cestu na 2 části v bodě, kde poprvé dosáhne diagonály. Od první části odeberte první a poslední úsek, druhou nechte beze změny. Co teď?*

Definice. *Nechť X je nějaká konečná množina, a nechť $\mathcal{P}$ je systém podmnožin množiny X. Dvojice $(X, \mathcal{P})$ se nazývá* konečná projektivní rovina*, pokud splňuje následující axiomy:*

(P0) Existuje čtyřbodová množina $Q \subseteq X$ taková, že $|P \cap Q| \leq 2$ pro každou množinu $P \in \mathcal{P}$.

[1] Např. pro $n = 3$, takových cest je 5:



(P1) Každé dvě různé množiny $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ *se protínají právě v jednom bodě, tj.* $|P_1 \cap P_2| = 1$.

(P2) Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ *existuje právě jedna množina* $P \in \mathcal{P}$ *taková, že* $x_1 \in P$ *a* $x_2 \in P$.

Je-li $(X, \mathcal{P})$ *konečná projektivní rovina, budeme prvkům* X *říkat* body *a množinám z* $\mathcal{P}$ přímky.

Příklad 2 (50 bodů)**.** *Nechť* X *je konečná množina taková že* $|X| \geq 2$, *a nechť* $\mathcal{P}$ *je systém podmnožin množiny* X. *Předpokládejme, že* $(X, \mathcal{P})$ *splňuje (P1) a (P2) z definice konečné projektivní množiny, ale nesplňuje (P0). Dokažte, že platí*

(a) $\mathcal{P} = \{X\}$, *či*

(b) existuje $a \in X$ *takové že* $\mathcal{P} = \Big\{X, \{a\}\Big\}$, *či*

(c) existuje $a \in X$ *takové že* $\mathcal{P} = \Big\{X \setminus \{a\}\Big\} \cup \Big\{\{a, x\} \mid x \in X \setminus \{a\}\Big\}$.