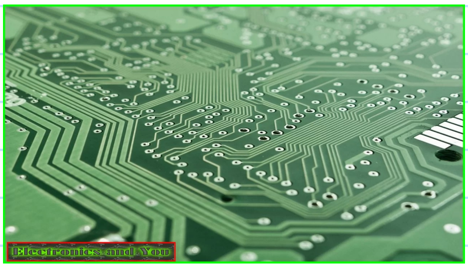
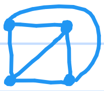
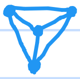
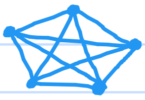
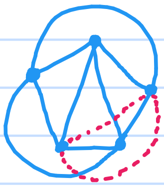
Diskrétní matematika – Rovinné grafy

Dosud jsme mluvili o vlastnostech grafů, které nezáleží na tom, jak byl graf nakreslen. V některých kontextech ale na nakreslení záleží.
Intuitivně řečeno, rovinné grafy jsou takové grafy, které lze „nakreslit do roviny bez křížení hran". Tedy mají „rovinné nakreslení".
nakreslení: vrcholům přiřadíme body v rovině
a hranám křivky, které končí v daných bodech.
nakreslení je rovinné, pokud se křivky nekříží

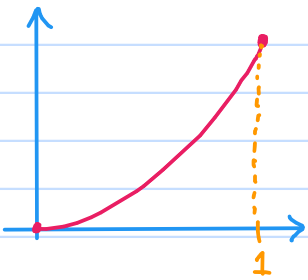
(Např. v elektronice jsou tzv. plošné spoje … na desce jsou vodiče natištěné v tenké kovové vrstvičce. Pochopitelně nechceme, aby se vodiče protínaly.)



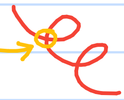
Příklad. Graf K_4 je rovinný: toto  není rovinné nakreslení, ale toto  nebo toto  jsou rovinná nakreslení.

A co K_5?  Pokud začneme kreslit takto  chybí tam tato hrana.
Tu chybějící hranu nelze dokreslit bez křížení stávajících hran. Ale třeba jsme jen začali špatně? A použili příliš málo klikaté hrany?
Ve skutečnosti rovinné nakreslení K_5 neexistuje. Ale jak to dokázat?
V prvé řadě, abychom mohli něco dokazovat, tak je potřeba definovat pojmy, o nichž mluvíme. Začneme s definicí křivky.

Motivace definice. Představme si, že kreslíme naši křivku na papír a trvá to jednu sekundu. Tento proces se dá popsat jako funkce
$f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ kde $f(t)$ je poloha tužky v čase t.
Nás zajímá množina všech $f(t)$ pro $t \in [0,1]$. Tu někdy značíme $f([0,1])$.
Tedy $f([0,1]) := \{f(t) ; t \in [0,1]\}$. Pokud f je „dost hezká", této množině říkáme křivka.

Např.  tato křivka (část paraboly s rovnicí $y=x^2$) se dá popsat pomocí funkce $f(t) = (t, t^2)$.
v čase t jsme v bodě roviny, který má souřadnice (t, t^2).
Ale určitě to není jediný způsob. Stejnou množinu dostaneme jako $g([0,1])$ pro $g(t) = (t^2, t^4)$ (pohybujeme tužkou jinou rychlostí)
nebo $h([0,1])$ pro $h(t) = (1-t, (1-t)^2)$ (kreslíme druhým směrem)
„různé parametrizace"
Při kreslení křivky je důležité, že „nikdy nezvedneme tužku z papíru."
Tento požadavek na funkci f je vyjádřen tím, že po f chceme, aby byla spojitá.
Pojem spojité funkce Vás čeká v příštím semestru, teď na něj nemáme dost nástrojů a definovat ho nebudeme. Intuitivní význam je ale tento.

Křivky jsou mnoha různých druhů. Té, kterou jsme se snažili popsat výše, se říká (Jordanův) oblouk.

Def. Oblouk je podmnožina roviny tvaru $f([0,1])$, kde $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je spojitá funkce, která je navíc prostá. t.j. toto  je zakázáno.
$f(0)$ a $f(1)$ jsou koncové body tohoto oblouku.

Podobný pojem je topologická kružnice. Ta se od oblouku liší jen tím, že $f(0)=f(1)$.

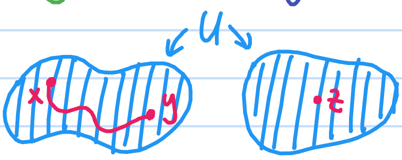
Def. Topologická kružnice je $f([0,1])$, kde $f: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je spojitá funkce, která je prostá na $[0,1)$ t.j. kdykoli $t_1, t_2 \in [0,1)$, tak $f(t_1) \neq f(t_2)$.
a $f(0) = f(1)$.

Def. Rovinné nakreslení grafu $G=(V,E)$ je prosté zobrazení $b: V \to \mathbb{R}^2$ a systém oblouků $\{c_e,\ e \in E\}$ takový, že:

- $\forall e \in E$: pokud $e = \{u,v\}$, tak c_e má konce $b(u), b(v)$.
- $\forall e \in E, \forall w \in V$: pokud w není konec hrany e, tak c_e neobsahuje $b(w)$.
- pokud $e \neq e'$: vyjma koncových bodů se c_e a $c_{e'}$ neprotínají.

Oblouková souvislost, komponenty

Def. Pokud $U \subseteq \mathbb{R}^2$, definujeme relaci $\approx$ na U takto:
$x \approx y \iff$ existuje oblouk $\gamma \subseteq U$ s koncovými body x a y.

Př. 

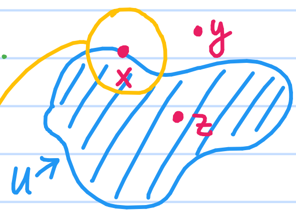
V tomto obrázku $x \approx y$, ale $\underbrace{\neg(x \approx z)}_{x \text{ není v relaci } \approx \text{ se } z}$.

Pozn. $\approx$ je ekvivalence.
(To těžko dokážeme, když neznáme pojem spojité funkce. Můžete si ale rozmyslet, že to alespoň nějak intuitivně dává smysl.)

Def. Komponenty obloukové souvislosti jsou třídy ekvivalence $\approx$.

Př. Toto U má dvě komponenty obloukové souvislosti.

Def. Pokud $U \subseteq \mathbb{R}^2$, pak x je na hranici množiny U, pokud každý kruh se středem x obsahuje body z U i body mimo U.

Př. 

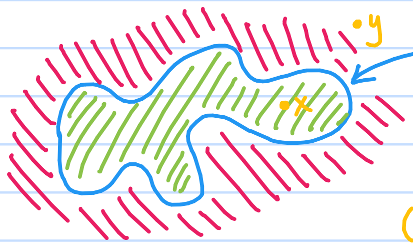
Zde x je na hranici U, y a z nejsou.

kruh se středem x obsahuje body z U i mimo U.

Věta (Jordanova věta o kružnici).
Nechť $\varkappa$ je topologická kružnice. Potom $\mathbb{R}^2 \setminus \varkappa$ má právě dvě komponenty obloukové souvislosti („vnitřek" a „vnějšek"). Jejich společnou hranicí je $\varkappa$.

Důkaz vynecháme. Je těžký a kromě toho patří do topologie, ne do kombinatoriky.

Př.

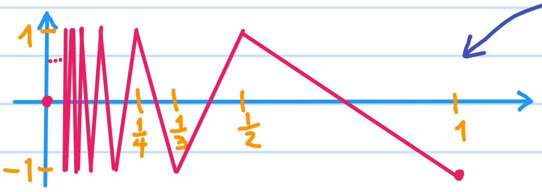


topologická kružnice $\varkappa$. Když z roviny odstraníme její body (představte si např. že podél ní stříháme nůžkami), tak se „rozpadne" na dva „kusy". To jsou komponenty obloukové souvislosti.
(Přesvěčte se intuitivně, že body x a y jsou v různých komponentách: neexistuje oblouk z x do y, který by zůstal uvnitř $\mathbb{R}^2 \setminus \varkappa$, každý oblouk z x do y někde protne $\varkappa$, a tedy se na okamžik octne mimo $\mathbb{R}^2 \setminus \varkappa$.)

nebudu zkoušet, je to jen pro Vaši představu

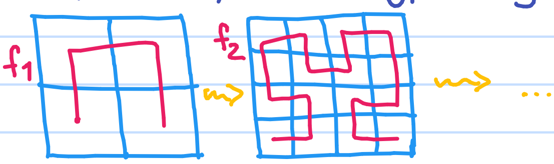
Tato věta vypadá dost triviálně, ale ve skutečnosti triviální není.
Důvodem je, že křivky mohou vypadat značně exoticky. Požadavek, aby ta definující funkce f byla spojitá, sice odfiltruje ty nejhorší případy, nicméně některé krásné a zajímavé (nebo patologické, podle úhlu pohledu ☺) křivky tímto sítem propadnou.

Př.

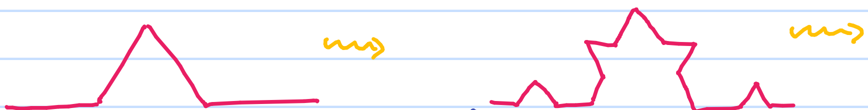


Např. tato lomená čára, která začíná v bodě $(1,-1)$, končí v bodě $(0,0)$ a prochází všemi body $(\frac{1}{n}, (-1)^n)$, není obraz žádné spojité funkce, tedy to není oblouk a tedy se neobjeví jako nakreslení hrany. → problém je okolo bodu $(0,0)$

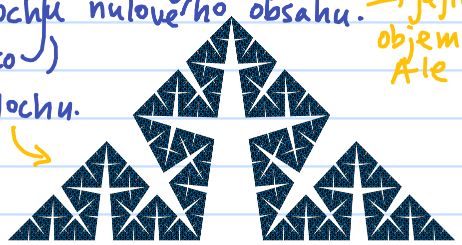
Př. Existují spojité funkce $[0,1] \to \mathbb{R}^2$, které vyplní celý čtverec $[0,1] \times [0,1]$.
Např. Hilbertova křivka:



f_i je vhodná parametrizace i-té křivky
a f je funkce, kterou dostaneme „v ∞-ném kroku"
(je to limita funkcí f_i, ale o limitách se dozvíte později)
Tato f je spojitá, ale není prostá. Jiné příklady jsou spojité i prosté.
Např. Kochova vločka vznikne podobným procesem:

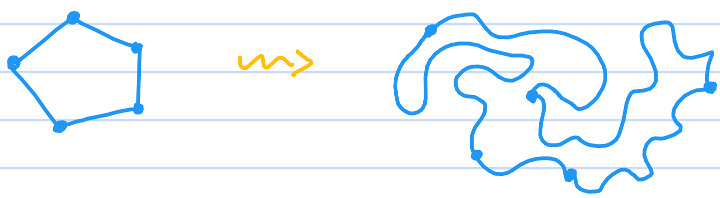


Výsledná funkce je spojitá i prostá, tedy je přípustná i jako oblouk.
Jsme zvyklí, že křivky zabírají plochu nulového obsahu. → jejich „1-dimenzionální objem", tedy délka, je nenulová. Ale „2-dimenzionální objem" je 0.
Ale dají se zkonstruovat (podobně jako ↓) i křivky, které zabírají nenulovou plochu.



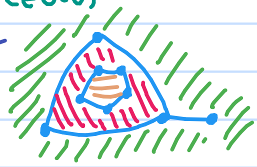
Když tedy připustíme, že topologická kružnice může vypadat podobně exoticky, jako předchozí příklady, tak Jordanova věta přestane vypadat tak triviálně.

Proč nás Jordanova věta zajímá?
- kružnice v rovinném nakreslení grafu odpovídají topologickým kružnicím. (vzniknou jako sjednocení oblouků)

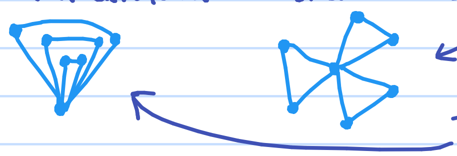


Def. Stěny rovinného nakreslení grafu G jsou komponenty obloukové souvislosti množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{e \in E(G)} c_e \right)$.

Př. Toto rovinné nakreslení má 3 (různě vyšrafované) stěny.



Př. Mohou existovat různá nakreslení stejného grafu, s různými stěnami, např. zde:



Toto nakreslení má stěnu, v jejíž hranici jsou nakreslení všech hran a vrcholů.
Toto nakreslení žádnou takovou stěnu nemá.

Kuratowského věta

Důsledek (Jordanovy věty) K_5 není rovinný.

Dk. Dokážeme to sporem. Předpokládejme, že K_5 je rovinný a vezmeme rovinné nakreslení. Vrcholy 1,2,3 a hrany mezi nimi v tom nakreslení tvoří topologickou kružnici.

Podle Jordanovy věty tato kružnice dělí rovinu na dvě části, „vnitřek" a „vnějšek". Vrchol 4 je v jedné z nich. Pokud je uvnitř: ⊛

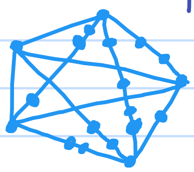
Podobným způsobem usoudíme, že pro umístění vrcholu 5 máme 4 možnosti.

Pokud je umístěn uvnitř kružnice $\mathcal{K}_{134}$ definované vrcholy 1,3,4 (a hranami mezi nimi), tak není žádný způsob, jak umístit oblouk odpovídající hraně $\{5,2\}$: $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{K}_{134}$ má dvě komponenty souvislosti a bod $b(5)$ je v jiné komponentě, než $b(2)$. A tedy nejdou propojit obloukem, který by zůstal v $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{K}_{134}$ (a tedy neprotl nějaký z oblouků $c_{\{1,3\}}$, $c_{\{3,4\}}$, $c_{\{1,4\}}$).
Tedy $b(5)$ nemůže být v regionu, který je „uvnitř" $\mathcal{K}_{134}$.
Podobně vyloučíme i všechny ostatní regiony. Není tedy žádný způsob umístění $b(5)$.
V ⊛ jsme předpokládali, že v je uvnitř té původní kružnice $\mathcal{K}_{123}$.
Pokud je venku, tak postupujeme naprosto analogicky.

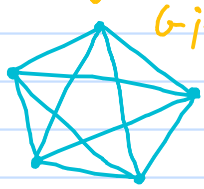
$\blacksquare$

Dělení grafu G je graf G', který vznikne tak, že do některých hran grafu G přidáme nové vrcholy. (alespoň 0 nových vrcholů ☺ ... speciálně tedy G je dělení grafu G)

Př.



např. toto je dělení grafu K_5.



: Nechť G je graf a G' je jeho dělení.
Pak G je rovinný $\iff$ G' je rovinný.

Není težké na intuitivní úrovni odůvodnit, proč by toto mělo platit.
(Z rovinného nakreslení G snadno dostaneme rovinné nakreslení G', a naopak.)

Podobně, jako jsme to udělali s K_5, lze dokázat, že ani $K_{3,3}$ není rovinný.
Tedy ani dělení K_5 nebo $K_{3,3}$ není rovinné.

Pokud G je podgraf grafu H a G není rovinný, tak H také není rovinný.

DK. Předpokládejme (ve snaze dospět ke sporu), že H je rovinný. Vezměme nějaké rovinné nakreslení grafu H. Smazáním bodů a křivek, které nejsou v G dostaneme rovinné nakreslení grafu G. To je spor s předpokladem, že G není rovinný. $\blacksquare$

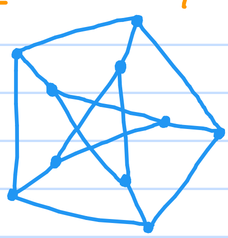
Takže graf, který obsahuje nějaké dělení K_5 nebo $K_{3,3}$ jako podgraf, není rovinný.
Překvapivě, toto jsou jediné „překážky rovinnosti". To říká následující věta.

Věta (Kuratowského).
G je rovinný $\iff$ neobsahuje jako podgraf žádné dělení K_5, ani žádné dělení $K_{3,3}$.

přesněji řečeno, neobsahuje podgraf, který by byl izomorfní nějakému dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

DK. Tu lehčí implikaci („$\Rightarrow$") jsme už dokázali.
Tu druhou („$\Leftarrow$") dokazovat nebudeme.

Cvičení. Dokažte, že následující graf není rovinný:



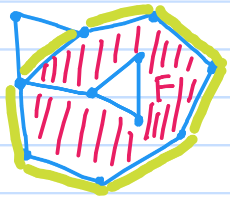
(toto je celkem důležitý graf, kterému se říká „Petersenův graf")

Počty vrcholů, hran a stěn

Pokud G obsahuje kružnici (jako podgraf), tak tato kružnice odpovídá topologické kružnici v rovinném nakreslení G. Pak (z Jordanovy věty) má toto nakreslení alespoň 2 stěny. Následující lemma říká, že to v nějakém smyslu platí i naopak. Toto je ale další z tvrzení, která nebudeme dokazovat.

Lemma⊛. Nechť F je stěna rovinného nakreslení grafu G. Pokud má G alespoň 2 stěny, pak hranice stěny F obsahuje nakreslení kružnice z G.

Př.



stěna F je vyšrafovaná
kružnice v její hranici

Důsledek. Libovolné rovinné nakreslení stromu má přesně jednu stěnu.

Věta (Eulerova formule) pravděpodobně nejstarší věta, kterou zde uvidíte, z roku 1752
Každé rovinné nakreslení souvislého grafu G má právě $|E(G)| - |V(G)| + 2$ stěn.

DK. Indukcí podle $|E(G)|$. Uvažme nějaké rovinné nakreslení G a nechť s je počet stěn tohoto nakreslení.

- Pokud $|E(G)| = 0$: G je souvislý a nemá hrany $\Rightarrow |V(G)| = 1$.
  Je zřejmé, že $s = 1$ a tedy $|E(G)| - |V(G)| + 2 = 0 - 1 + 2 = 1 = s$.

- Pokud $|E(G)| > 0$:
  - pokud G neobsahuje kružnici, je to strom. Viděli jsme výše, že pak $s = 1$. Ale $|E(G)| - |V(G)| + 2 = -1 + 2 = 1 = s$.
    ↳ charakterizace stromů
  - pokud G obsahuje kružnici C:
    Nechť e je hrana C. Pak C dělí rovinu na 2 části (Jordanova věta) a e tedy sousedí se dvěma stěnami.
    Vymažeme e a dostaneme graf G'.
    Uvažujme jeho nakreslení, které vzniklo z původního nakreslení G.
    2 stěny, se kterými e sousedila, se slily do jedné.
    Máme tedy rovinné nakreslení grafu G', který má méně hran, proto můžeme použít indukční předpoklad.
    Ten tvrdí, že G' má $|E(G')| - |V(G')| + 2$ stěn.
    G má tedy o jednu více, t.j.
    $$|E(G')| - |V(G')| + 3 = |E(G)| - 1 - |V(G)| + 3 = |E(G)| - |V(G)| + 2.$$

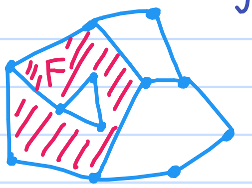
◩

Obdobně se dá dokázat:

Věta. Pokud G je rovinný a má k komponent souvislosti a s je počet stěn jeho rovinného nakreslení, pak $|V| - |E| + s = k + 1$.

Lemma. Pokud G je rovinný a obsahuje kružnici, tak každá stěna má ve své hranici alespoň 3 oblouky, které odpovídají hranám G.

Dk. Nechť F je stěna G. V lemmatu ⊛ jsme zmínili, že v hranici stěny F se nachází nakreslení kružnice C z G. Kružnice C má alespoň 3 hrany. ▨



Věta (horní mez na počet hran rovinného grafu)
Nechť $G=(V,E)$ je rovinný graf, kde $|V| \geq 3$. Pak $|E| \leq 3|V|-6$.

Dk. Zafixujeme nějaké rovinné nakreslení G.

- Pokud G obsahuje kružnici: Budeme počítat dvěma způsoby velikost množiny $\{(e,F);\ e \in E(G)$ a F je stěna nakreslení, která má e ve své hranici$\}$. Pokud definujeme a_i jako počet hran na hranici stěny i, a s je počet stěn, tak

$$|R| = a_1 + a_2 + \dots + a_s \geq 3 \cdot s$$

jelikož (podle lemmatu výše) každá stěna má ve své hranici alespoň 3 hrany. Na druhou stranu, $|R| \leq 2 \cdot |E|$, protože každá hrana je v hranici nejvýše dvou stěn. (např. v obrázku výše má F ve své hranici hranu, která není v žádné jiné stěně.)

Když tyto dvě nerovnice dáme dohromady, dostaneme

$$3 \cdot s \leq 2 \cdot |E|$$

Z Eulerovy formule víme: $|E| = |V| + s - (k+1) \leq |V| + s - 2$ $k+1 \geq 2$

a tedy $3 \cdot |E| \leq 3|V| + 3s - 6 \leq 3 \cdot |V| + 2 \cdot |E| - 6$

a $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$.

- Pokud G neobsahuje kružnici: jeho komponenty jsou stromy. Poud G má k komponent a i-tá má n_i vrcholů,

$$|E| = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = |V| - k \leq |V| - 1 \leq 3 \cdot |V| - 6.$$ zde potřebujeme $|V| \geq 3$. ▨

Pokud víme, že G neobsahuje trojúhelníky (t.j. kružnice C_3 jako podgrafy), tak každá stěna má ve své hranici alespoň 4 hrany. Imitováním důkazu dostaneme:

Věta: Pokud $G=(V,E)$ je rovinný a $|V| \geq 3$, a navíc G neobsahuje trojúhelníky, pak $|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$.

Zkuste si sami napsat důkaz této věty a rozmyslet, že funguje!

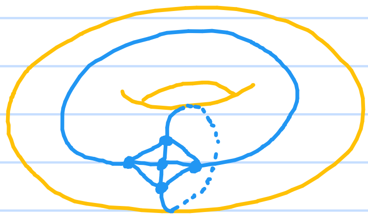
Důsledek. Pokud G je rovinný, G má nějaký vrchol stupně ≤ 5.
Pokud G je rovinný bez trojúhelníků, pak G má vrchol stupně ≤ 3.

Dk. Nechť (pro všechna i) d_i je stupeň vrcholu v_i.
Průměrný stupeň v grafu G je $\frac{\sum d_i}{|V|} = \frac{2 \cdot |E|}{|V|} \leq \frac{2 \cdot (3|V|-6)}{|V|} = 6 - \frac{12}{|V|} < 6$.

Tedy existuje i t.ž. $d_i < 6$. Podobně i druhá část. ▨

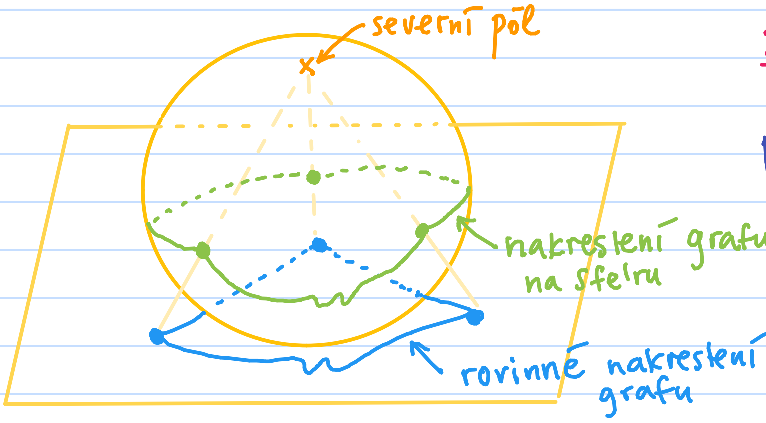
Kreslení na jiné povrchy

Graf K_5 není rovinný, ale dá se bez křížení hran nakreslit na torus:



Obecně: jak „složitý" musí být povrch, aby se dal daný nerovinný graf na něj nakreslit?

Koule: na tu se bez křížení dají nakreslit přesně stejné grafy, jako do roviny.



Stereografická projekce:
umístíme žárovku na severní pól průhledné sféry, na níž je nakreslen graf. Stíny nakreslení definují rovinné nakreslení. A funguje to samozřejmě i naopak: rovinné nakreslení definuje nakreslení na sféru.

Když je dáno nakreslení na sféru bez křížení hran, najdeme takto rovinné nakreslení, a naopak. Stejné grafy se tedy dají nakreslit bez křížení na sféru a do roviny.

Nicméně přeci jenom nám kreslení na sféru k něčemu je: pomůže nám odůvodnit, že graf lze „převléknout" tak, aby stěna, kterou jsme si vybrali, byla vnější.

Přesněji řečeno:
Hranice každé stěny odpovídá uzavřenému sledu v G.
posloupnost $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_t, v_t)$ kde se vrcholy i hrany mohou opakovat

👁: Stěny nakreslení na kouli jsou ohraničeny stejnými sledy, jako stěny „odpovídajícího" nakreslení v rovině.

👁: Nechť S je nějaká stěna rovinného nakreslení grafu G ohraničená sledem S. Pak existuje nakreslení G, kde všechny stěny jsou ohraničeny stejnými sledy jako v tom původním nakreslení, ale vnější stěna je ohraničena sledem S.

Dk. Vezmeme původní rovinné nakreslení, promítneme ho na kouli, pootočíme kouli tak, aby severní pól byl uvnitř stěny S, a promítneme zpět do roviny.