10. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Komplementarita

Příklady naleznete na zadní straně.

Původní program:	*V duálu bude:*
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i-tá podmínka má $\leq$ i-tá podmínka má $\geq$ i-tá podmínka má $=$	$y_i \geq 0$ $y_i \leq 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$ $x_j \leq 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	j-tá podmínka má $\geq$ j-tá podmínka má $\leq$ j-tá podmínka má $=$

D(Volnost**):** Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j-tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \ldots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x'.

Pak *volnost* (slack) j-té nerovnosti vůči řešení x' je $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla $\geq$, definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řesení.

T(Komplementarita**):** Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \tag{P}$$
$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primáru a duálu (x^*, y^*). Pak platí následující věta: Dvojice (x^*, y^*) je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon x_i^* \cdot s_i^{(D)} = 0, \tag{1}$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \colon s_j^{(P)} \cdot y_j^* = 0. \tag{2}$$

Příklad první Josef K. opsal od souseda při písemce z Optimalizací přípustné řešení primáru a zadaní duálu.

Duál je:

$$
\begin{aligned}
\max 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 & \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 5 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Přípustným řešením primáru je $y = (4, 0, -1)$. Úloha se však ptala na to, je-li řešení primáru optimem nebo ne. Dořešte úlohu za Josefa.

Příklad druhý Optimální řešení duální úlohy k následující úloze je $(0; 7; 5, 5; 0)$. Spočtěte pomocí komplementarity optimální řešení primáru.

$$
\begin{aligned}
\max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 & \\
5x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 12 \\
-x_1 - x_2 + x_3 &\leq -1 \\
2x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 + x_3 &\leq 4 \\
x_1, \ldots, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

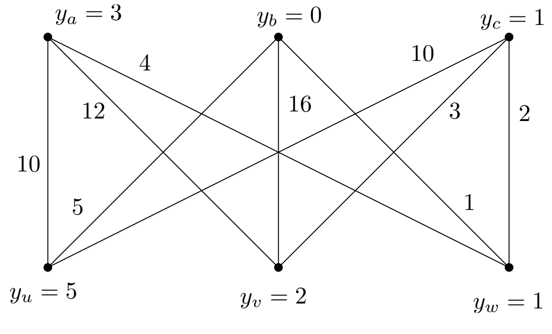
Příklad třetí Pro LP a jeho duál z předchozího příkladu nalezněte dvojici nenulových vektorů x a y takovou, že platí

$$
\begin{aligned}
\forall i \in \{1, \ldots, n\} \colon x_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \\
\forall j \in \{1, \ldots, m\} \colon s_j^{(P)} \cdot y_j = 0.
\end{aligned}
$$

ale x a y **nejsou** dvojicí optimálních řešení.

Tip: Najděte rozdíl mezi zadáním této úlohy a zadáním komplementarity.

Příklad čtvrtý Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané ceny a u vrcholů řešení duálního programu k perfektnímu párování minimální ceny. Dokažte, že toto řešení je optimální.



Dále se zkuste zamyslet, jaké různé možnosti máte pro dokázání, že dané řešení je optimální.