# 9. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Dualita

**D:** Mějme lineární program s $n$ proměnnými a $m$ podmínkami:

$$\max c^T x \text{ za podmínek } Ax \leq b \text{ a } x \geq 0 \tag{P}$$

Pak jeho *duálem* nazveme následující lineární program s $m$ proměnnými a $n$ podmínkami:

$$\min b^T y \text{ za podmínek } A^T y \geq c \text{ a } y \geq 0 \tag{D}$$

| *Původní program:* | *V duálu bude:* |
|---|---|
| maximum | minimum |
| $\max c^T x$ | $\min b^T y$ |
| $m$ podmínek<br>$n$ proměnných | $m$ proměnných<br>$n$ podmínek |
| $i$-tá podmínka má $\leq$<br>$i$-tá podmínka má $\geq$<br>$i$-tá podmínka má $=$ | $y_i \geq 0$<br>$y_i \leq 0$<br>$y_i \in \mathbb{R}$ |
| $x_j \geq 0$<br>$x_j \leq 0$<br>$x_j \in \mathbb{R}$ | $j$-tá podmínka má $\geq$<br>$j$-tá podmínka má $\leq$<br>$j$-tá podmínka má $=$ |

**T(**Slabá věta o dualitě**):** Mějme maximalizační lineární program (P) a jeho duální (minimalizační) program (D). Pak pro libovolné řešení $x$ a libovolné řešení duálu $y$ platí, že $c^T x \leq b^T y$.

Jinými slovy, hodnota duálního řešení je horní odhad na hodnotu libovolného primárního řešení.

**T(**Silná věta o dualitě**):** Pro úlohy (P) a (D) nastane právě jedna z následujících možností:

1. Ani (P), ani (D) nemá přípustné řešení.
2. (P) je neomezená a (D) nemá přípustné řešení.
3. (P) nemá přípustné řešení a (D) je neomezená.
4. Jak (P), tak (D) mají přípustné řešení. Pak existuje optimální řešení $x^*$ úlohy (P) a optimální řešení $y^*$ úlohy (D) a platí $c^T x^* = b^T y^*$.

---

## Příklad první

Odvoďte duální úlohu pro lineární program:

$$\begin{aligned} \max 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Příklad druhý

Sestrojte duální úlohu k následující úloze:

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 - 6x_3 + x_4 &\leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\geq 5 \\ x_2 &\leq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Příklad třetí** Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy Minimální vrcholové pokrytí pro vážený graf $G = (V, E, w)$. Pro připomenutí, úloha vypadá takto:

$$\min \sum_{v \in V} w(v) x_v$$
$$\forall e = (uv) \in E : x_u + x_v \geq 1$$
$$\forall v \in V : x_v \geq 0$$

*Doplňující otázka:* Jaký problém řeší duální program (pro jednotkové váhy)?

**Příklad čtvrtý** Představme si zadaní lineárního programu, jehož řešení zatím neznáme:

$$\max c^T x,\ \ Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

Pomocí duality zkonstruujte nový lineární program, který splňuje:

- neobsahuje účelovou funkci,
- ze souřadnic libovolného přípustného řešení jde vyčíst optimální řešení původního.

**Příklad pátý** Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:

- Pro každý lineární program $L$ platí, že duál duálu $L$ je původní program $L$.
- Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.

**Příklad šestý** Zformulujte lineární program, který řeší úlohu Nejkratší $s, t$-cesta v neorientovaném neohodnoceném grafu. Vysvětlete hlavní ideu vašeho lineárního programu. Až budete mít daný lineární program, zkonstruujte k němu duál.

*Doplňující otázka:* Má i váš duální program nějakou hlavní ideu?