7. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Simplexová metoda

Úloha LP v rovnicovém tvaru: max $c^T x$ za podmínek $Ax = b, x \geq 0$.

D: *Báze* je množina indexů proměnných $B \subseteq \{1, \dots n\}$ taková, že A_B je regulární (A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B).

Bázické řešení x odpovídající B je řešení $Ax = b$, pro které platí: $\forall i \notin B : x_i = 0$.

Přípustná báze je taková, že odpovídající bázické řešení x je přípustné, tedy $x \geq 0$.

Příklad první

Převeďte LP do rovnicového tvaru s nezápornými proměnnými:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 3 \\
x_2 + x_3 &\leq 12 \\
x_1 + 3x_2 - x_4 &\geq -7 \\
x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \\
x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Nalezněte také nějaké bázické přípustné řešení pro zadaný rovnicový tvar.

Máme-li libovolný lineární program s m lineárními nerovnicemi či rovnicemi a n proměnnými, kolik nejvýše může mít rovnicový tvar této úlohy proměnných?

Příklad druhý

Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP:

$$
\begin{aligned}
\max 3x_1 + 4x_2 & \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
2x_1 + x_2 &\leq 5 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Příklad třetí

Mějme zadaný následující problém:

$$
\begin{aligned}
\max x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & \\
x_1 - x_5 + x_6 &= 20 \\
x_1 + x_3 + x_7 &= 30 \\
x_1 + x_2 + x_4 + x_8 &= 10 \\
x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_9 &= 1 \\
x_1, x_2, \dots, x_9 &\geq 0
\end{aligned}
$$

a počáteční bazické řešení $(0, 0, 0, 0, 0, 20, 30, 10, 1)$. Proveďte jeden krok simplexového algoritmu. Zdůvodněte, proč jste si vybrali ze všech možností právě tento.

Příklad čtvrtý

Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP:

$$
\begin{aligned}
\max 2x_1 - x_2 + 2x_3 & \\
2x_1 + x_2 &\leq 10 \\
x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\
x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Příklad pátý Pomocí simplexové metody nalezněte nejprve přípustné bazické řešení a následně i optimální řešení následující úlohy:

$$\begin{aligned} \max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 & \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 12 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_3 &\leq 4 \\ x_1, \ldots, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$