5. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Mnohostěny a ty jejich stěny

Příklad první Dokažte, že množina všech optimálních řešení daného lineárního programu zadaného například

$$\max c^T x \text{ za podmínek } Ax \leq b, x \geq 0$$

je konvexní množina.

Příklad druhý Máte mnohostěn $P \in \mathbb{R}^3$ určený množinou vrcholů:

$$a = (2,1,6), \quad b = (0,-5,0), \quad c = (-2,2,-1), \quad d = (0,-4,0), \quad e = (0,1,1).$$

Pro každou následující nadrovinu určete, zda je vůči P tečná, sečná či mimoběžná a pro tečné nadroviny určete dimenzi příslušné stěny:

a) $5x + 3y - 2z = 1$
b) $x + y - z = 2$
c) $3x + 1z = 0$

Příklad třetí

a) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionální krychle $[0,1]^d$?
b) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionálního křížového mnohostěnu

$$\{x \in \mathbb{R}^d \colon |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_d| \leq \ 1\}?$$

c) Kolik stěn dimenze k má d-dimenzionální simplex (konvexní obal $d+1$ afinně nezávislých bodů)?

Příklad čtvrtý Nalezněte všechny vrcholy mnohostěnu zadaného následujícími nerovnostmi a zdůvodněte, že jde o všechny:

$$\begin{aligned} x + y + z &\leq 3, \\ y + 2z &\leq 2, \\ x, y, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Příklad pátý Rozhodněte, jestli bod $v = (1,1,1)$ je vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nadrovin:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -10 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$