

## 2. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Celočíselné programy a proč je nechceme (moc) používat

**PŘÍKLAD NULTÝ** Pro zadanou matici  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a vektory  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  uvažujme příslušný celočíselný program a lineární program:

$$\max c^T x \text{ za podmínek } Ax \leq b \text{ pro } x \in \{0, 1\}^n, \quad (\text{CP})$$

$$\max c^T x \text{ za podmínek } Ax \leq b \text{ pro } x \in [0, 1]^n. \quad (\text{LP})$$

Předpokládejme, že oba programy jsou řešitelné a mají optimální řešení  $x_{CP}^*$  a  $x_{LP}^*$ . Zdůvodněte, proč platí nerovnost  $c^T x_{CP}^* \leq c^T x_{LP}^*$ .

**PŘÍKLAD PRVNÍ** Formulujte jako úlohu lineárního programování hledání optimální strategie pro hru kámen, nůžky, papír, t.j. hru dvou hráčů s nulovým součtem (výhra jednoho hráče = prohra druhého hráče) a výplatní maticí:

	kámen	nůžky	papír
kámen	0	1	-1
nůžky	-1	0	1
papír	1	-1	0

Jak se změní naše strategie a očekávaná výhra, pokud se výplata prvního hráče ve stavu (kámen, nůžky) zvýší na 2?

**PŘÍKLAD DRUHÝ** Zformulujte problém batohu pomocí celočíselného lineárního programování. Tedy pro předměty, kde každý má nějakou váhu a cenu, máme batoh s danou nosností a my se do něj snažíme naskládat předměty tak, abychom maximalizovali jejich cenu.

**PŘÍKLAD TŘETÍ** V Kocourkově je  $n$  pekáren a  $m$  obchodů. Každý den  $i$ -tá pekárna upeče  $p_i$  rohlíků a  $j$ -tý obchod prodá  $o_j$  rohlíků. Převoz jednoho rohlíku z  $i$ -té pekárny do  $j$ -tého obchodu stojí  $c_{ij}$  korun.

*Jenže!* Praxe v Kocourkově ukázala, že když  $i$ -tá pekárna zásobuje  $j$ -tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí  $l_{ij}$ . Logistiku  $l_{ij}$  je nutné platit pouze tehdy, když  $i$ -tá pekárna zásobuje  $j$ -tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné  $c_{ij}$ .

Nalezněte takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal (právě) potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální.

**PŘÍKLAD ČTVRTÝ** Pro problém vrcholové 3-obarvitelnosti grafu vymyslete vhodný celočíselný lineární program. Program pouze otestujte, zda-li je zadaný graf 3-obarvitelný.

A jak by mohlo vypadat ILP, které spočítá barevnost grafu (tj. minimální  $k$  takové, že je graf  $k$  obarvitelný)?

**PŘÍKLAD PÁTÝ** Student Josef K. dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

*Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujícího, čili pro daný ohodnocený graf  $G = (V, E, f)$ , kde  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou.*

Josef K. navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu  $e \in E$  máme proměnnou  $x_e \in \{0, 1\}$ , účelová funkce je  $\min \sum_{e \in E} f(e)x_e$  a pro každý vrchol  $u \in V$  máme podmínku  $\sum_{e \in E: u \in e} x_e = 2$ .“

Funguje řešení Josefa K.? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.