9. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Totální unimodularita

D: Čtvercová matice $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ je *unimodulární*, pokud $\det M \in \{-1, 1\}$.

T: Součin a inverze unimodulárních matic jsou unimodulární matice.

T: Unimodulární matice jsou právě ty celočíslené matice, jejichž inverze je celočíselná.

D: Matice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je *totálně unimodulární*, pokud determinant každé její čtvercové podmatice je roven $-1, 0$ nebo 1.

D: Mnohostěn nazveme *celočíselným*, pokud má všechny vrcholy celočíselné.

T: Uvažme lineární program $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$, kde b je celočíselný vektor a A je totálně unimodulární matice. Pak je mnohostěn přípustných řešení celočíselný.

T(Důsledek předchozí věty**):** Uvažme celočíselný program ILP: $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$, $x \in \mathbb{Z}$ a jeho lineární relaxaci LP: $\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$. Pokud je b celočíselný vektor a A totálně unimodulární, pak vrcholové optimální řešení LP je optimálním řešením ILP.

Z minula:

Příklad první   Nalezněte program, který je nepřípustný a jeho duál je také nepřípustný.

Příklad druhý   Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:

- Pro každý lineární program L platí, že duál duálu L je původní program L.
- Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.

Příklad třetí   Nechť A je totálně unimodulární matice a nechť I je libovolně velká matice, která má v každém sloupci právě jednu jednotku a zbytek nuly. Dokažte následující:

- Dokažte, že A může obsahovat jen prvky 0, 1 nebo -1.
- Ukažte, že A^T, $\binom{A}{-A}$ a $(A|I)$ jsou totálně unimodulární matice.

Příklad čtvrtý   Mějme zadanou matici X. Ověřte, jestli matice X je totálně unimodulární, bez použití následujícího příkladu.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad pátý Mějme matici A velikosti $m \times n$, jejíž řádky jdou rozložit na dvě skupiny B a C. Nechť také platí:

- $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$,
- každý sloupec obsahuje nejvýše 2 nenulové hodnoty,
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A stejné znaménko, tak jeden řádek patří do B a druhý do C.
- Pokud mají dvě nenulové hodnoty v jednom sloupci A různé znaménko, tak oba řádky patří do B, nebo oba patří do C.

Dokažte, že A je potom totálně unimodulární.

Tip: Dokazujte indukcí podle velikosti čtvercové podmatice. Začněte tím, že eliminujete případy, kdy v jednom sloupci je nejvýše 1 nenulová hodnota.

Příklad šestý Dokažte, že každá matice incidence orientovaného grafu je totálně unimodulární.

Příklad sedmý Dokažte, že matice incidence neorientovaného grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní. Plyne z tohoto tvrzení snadné hledání celočíselných řešení některých problémů?

Příklad osmý Nalezněte celočíselný mnohostěn $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A je matice alespoň 3×3 a A i b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 2 týdny od zadání.

Sedmý domácí úkol **[3 body]**

Vezměme si jeden vektor (sloupec) v s hodnotami $\{0, 1\}^n$. Řekneme, že v je *intervalový*, pokud v má hodnoty 1 za sebou v právě jednom souvislém intervalu (třeba i délky 0). Matice M je *intervalová*, pokud všechny její sloupce jsou intervalové vektory.

Dokažte:

1. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a pro každou $A' \in \mathbb{R}^{k \times k}$ podmatici A existuje unimodulární $B' \in \mathbb{Z}^{k \times k}$ taková, že $B'A'$ je unimodulární nebo singulární. Pak A je totálně unimodulární.
2. Každá intervalová matice M je totálně unimodulární.