8. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Dualita

D: Mějme lineární program s n proměnnými a m podmínkami:

$$\max c^T x,\ \ Ax \le b,\ \ x \ge 0$$

Pak jeho *duálem* nazveme následující lineární program s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min b^T y,\ \ A^T y \ge c,\ \ y \ge 0$$

T(Slabá věta o dualitě**):** Mějme maximalizační lineární program $\max c^T x$ a duální minimalizační program $\min b^T y$. Pak pro libovolné řešení x a libovolné řešení duálu y platí, že $c^T x \le b^T y$.

Jinými slovy, hodnota duálního řešení je horní odhad na hodnotu libovolného primárního řešení.

Původní program:	*V duálu bude:*
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i-tá podmínka má $\le$ i-tá podmínka má $\ge$ i-tá podmínka má $=$	$y_i \ge 0$ $y_i \le 0$ $y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \ge 0$ $x_j \le 0$ $x_j \in \mathbb{R}$	j-tá podmínka má $\ge$ j-tá podmínka má $\le$ j-tá podmínka má $=$

Příklad první — Sestrojte duální úlohu k následující úloze:

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 - 6x_3 + x_4 &\le 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &\ge 5 \\ x_2 &\le 0 \\ x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Příklad druhý Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy Minimální vrcholové pokrytí pro vážený graf $G = (V, E, w)$. Pro připomenutí, úloha vypadá takto:

$$\min \sum_{v \in V} w(v) x_v$$
$$\forall e = (uv) \in E : x_u + x_v \geq 1$$
$$\forall v \in V : x_v \geq 0$$

Doplňující otázka: Jaký problém řeší duální program?

Příklad třetí Představme si zadaní lineárního programu, jehož řešení zatím neznáme:

$$\max c^T x,\ \ Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

Pomocí duality zkonstruujte nový lineární program, který splňuje:

- neobsahuje účelovou funkci,
- ze souřadnic libovolného přípustného řešení jde vyčíst optimální řešení původního.

Příklad čtvrtý Zformulujte lineární program, který řeší úlohu Nejkratší s,t-cesta v neorientovaném neohodnoceném grafu. Vysvětlete hlavní ideu vašeho lineárního programu. Až budete mít daný lineární program, zkonstruujte k němu duál.

Doplňující otázka: Má i váš duální program nějakou hlavní ideu?

Příklad pátý Nalezněte program, který je nepřípustný a jeho duál je také nepřípustný.

Příklad šestý Dokažte nebo vyvraťte tvrzení:

- Pro každý lineární program L platí, že duál duálu L je původní program L.
- Pokud má lineární program optimum s celočíselnými proměnnými, tak má celočíselné optimální řešení i duál.