

5. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Mnohostěny a jejich stěny

Příklady naleznete na zadní straně.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v \mathbb{R}^d dimenze $d-1$, je určena rovnicí $c^T x = b$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd.

Nadrovina rozděluje prostor \mathbb{R}^d na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

D: *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v \mathbb{R}^d , který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x | Ax \leq b\}$ pro nějakou reálnou matici A a reálný vektor b .

D: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x : c^T x = t$, označíme $\{x | c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* konvexního mnohostěnu P .

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P . K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* \emptyset a P .

D: *Vrchol* mnohostěnu P je stěnou dimenze 0, *hrana* je stěnou dimenze 1 a *faseta* je stěnou dimenze $d-1$.

D: Řekneme, že konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud se vejde do koule s konečně velkým poloměrem. Pro dobrou intuici si stačí představit, že mnohostěn neutíká do nekonečna.

D: d -dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d+1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d -dimenzionální simplex v \mathbb{R}^d můžeme představit jako konvexní obal:

$$\text{conv}(0, (0, 0, \dots, 0, 1), (0, 0, \dots, 1, 0), \dots, (1, 0, \dots, 0, 0))$$

Z minula:

PŘÍKLAD PRVNÍ Už víme, že množina K je konvexní, pokud do množiny patří všechny úsečky s dvěma konci v K . Dokažte podobný popis pro afinitu:

Množina A je afinní podprostor \mathbb{R}^d právě tehdy, když pro každé dva body $a, b \in A$ platí, že *přímka* určená body a, b je celá obsažena v A .

PŘÍKLAD DRUHÝ Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \ \& \ x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

PŘÍKLAD TŘETÍ Vlastnosti mnohostěnu:

- Dokažte, že každá stěna *omezeného* mnohostěnu je konvexním obalem podmnožiny jeho vrcholů. Ukažte také, že bez slova „omezeného“ tvrzení neplatí.
- Dokažte, že libovolná stěna simplexu je sama simplexem.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Rozhodněte, jestli vrchol $v = (1, 1, 1)$ je vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nadrovin:

a)

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -10 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zde navíc vypište všechny vrcholy daného mnohostěnu.

PŘÍKLAD PÁTÝ Dokažte:

- kolik nejméně poloprostorů (nerovnic) je potřeba pro popis d -dimenzionální krychle $([0, 1]^d)$? A kolik má d -dimenzionální krychle vrcholů?
- že, každý omezený konvexní mnohostěn dimenze d v \mathbb{R}^d má alespoň $d + 1$ vrcholů a alespoň $d + 1$ faset.

PŘÍKLAD ŠESTÝ

Ověřte (bez použití vět z přednášky), že d -dimenzionální simplex může být vyjádřen také jako průnik $d + 1$ poloprostorů.