2. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Naučíme se nový „programovací jazyk“: lineární nerovnice

Příklad první Pekárna peče chleby, housky, bagety a koblihy.

- K upečení jednoho chleba potřebuje půl kila mouky, 10 vajec a 50 g soli.
- Na jednu housku je zapotřebí 150 g mouky, 2 vejce a 10 g soli.
- Na bagetu potřebuje 230 g mouky, 7 vajec a 15 g soli.
- Na jednu koblihu je třeba 100 g mouky a 1 vejce.

Pekárna má k dispozici 5 kilo mouky, 125 vajec a půl kila soli. Za jeden chleba získá pekárna 20 korun, za housku 2 koruny, za bagetu 10 korun a za koblihu 7 korun.

Pekárna se snaží vydělat co nejvíce. Jak ale zjistí kolik chlebů, housek, baget a koblih má upéci?

Příklad druhý Formulujte prokládání přímkou jako LP. Máme n bodů v rovině. Najděte přímku (resp. souřadnice přímky), která minimalizuje sumu vertikálních vzdáleností bodů od výsledné přímky. Vertikální vzdálenost je vzdálenost měřena pouze na ose y.

Pro jednoduchost předpokládejte, že výsledná přímka není kolmá na osu x.

Příklad třetí Rozhodněte, zda lze a popř. jak:

1. Převést LP, které má všechny proměnné $x \in \mathbb{R}_0^+$, na LP s proměnnými $x' \in \mathbb{R}$ a naopak.
2. Převést LP s podmínkami ve tvaru nerovností a s proměnnými $x \in \mathbb{R}$ na LP, jehož podmínky jsou pouze rovnosti, ale proměnné jsou omezené (a naopak).
3. Převést úlohu LP bez optimalizační klauzule na rovnicový tvar a vyřešit Gaussovou eliminací.

Příklad čtvrtý **Část 1.** Mějme systém lineárních nerovnic, který obsahuje i ostré nerovnosti, kupř. tento:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &\leq 8 \\ 2x - 5z &< -3 \\ 6x + 5y + 2w &= 5 \\ 3z + 2w &> 5 \\ x, y, z, w &\geq 0 \end{aligned}$$

Jak pomocí lineárního programování zjistit, zda takovýto systém má přípustné řešení?

Část 2. Můžeme tedy řešit lineární programy s ostrými nerovnostmi? Obecně ne. Jako příklad zkonstruujte „LP s ostrými nerovnostmi“, který:

- má (triviální) konečný horní odhad na hodnotu optima,
- má přípustné řešení a
- nemá optimální řešení.

Toto se pro lineární program nemůže stát – pokud je LP omezený a existuje přípustné řešení, tak také existuje optimální řešení.

Část 3. Kdy tedy můžeme řešit LP s ostrými nerovnostmi?

Příklad pátý Newyorkská radnice se pro zvýšení bezpečnosti rozhodla postavit novou policejní stanici. Za účelem určení vhodné polohy stanice vytipovala n míst, kde je pravděpodobná kriminální aktivita – jejich polohy jsou (x_i, y_i) pro $i \in 1, 2, \ldots, n$.

Vaším úkolem je navrhnout LP, který určí umístění stanice minimalizující maximální dojezdovou dobu na tato místa. Dojezdová doba je přímo úměrná vzdálenosti bodů v Manhattanské metrice – tj. vzdálenost bodů (x_1, y_1) a (x_2, y_2) je $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Příklad šestý Zformulujte problém batohu pomocí celočísleného lineárního programování. Tedy pro předměty, kde každý má nějakou váhu a cenu, máme batoh s danou nosností a my se do něj snažíme naskládat předměty tak, abychom maximalizovali jejich cenu.

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 14 dní od zadání.

První domácí úkol **[2 body]**

Vyrábíme čokoládu! Jelikož je po čokoládě rozdílná poptávka po celý rok, je třeba takovou výrobu řádně naplánovat... Předpovězená poptávka, dle které chceme výrobu plánovat, je $d_i > 0$ pro i-tý měsíc v tunách.

Vyjádřete lineárním programem, kolik čokolády se má v následujícím roce vyrobit v jednotlivých měsících, tak abychom vždy uspokojili poptávku a zároveň utratili za výrobu co nejméně. Změna objemu výroby o 1 tunu mezi následujícími měsíci stojí 1500 Kč (kvůli propouštění či náboru zaměstnanců atp.) a skladování 1 tuny čokolády stojí 600 Kč (počítá se skladování z jednoho měsíce na další).

Samotnou výrobu čokolády nepočítejte, neboť se zaplatí z prodeje. Také předpokládejte, že se čokoláda nekazí a na konci prosince vám nemá žádná zbýt.

Hint: Stanovme s_i jako přebytek čokolády v i-tém měsící, a nastavme $s_0 = s_{12} = 0$.

Druhý domácí úkol **[2 body]**

Společnost chce naplánovat výrobu na následujících šest měsíců. Nyní akorát končí 2. měsíc. Poptávku po jejich produktu v nadcházejících měsících přehledně shrnuje tato tabulka:

Měsíc	3	4	5	6	7	8	9
Poptávka	5000	6000	6500	7000	2000	2000	12 000

Společnost má v současné době na skladě 1000 výrobků, které byly vyrobeny ve 2. měsíci, 2000 výrobků vyrobených v 1. měsíci a 500 výrobků vyrobených v 0. měsíci. Společnost je schopna vyrobit nejvýše vyrobit 6000 kusů za jeden měsíc, ale přesto chce manažer uspokojit poptávku ve všech měsících. Výroba jednoho kusu stojí 15 Kč a jeho skladování stojí 0,75 Kč za kus a měsíc.

Největším problém je však trvanlivost. Na konci měsíce t podniková inspekce zjistí, že v průměru se musí vyhodit 11 % výrobků vyrobených v měsíci t, 47 % výrobků vyrobených v měsíci $t-1$ a všechny výrobky z měsíce $t-2$. Každý vyhozený výrobek stojí společnost dalších 25 Kč (i se započtením nákladů na kontrolu). Nyní se nacházíme akorát před inspekcí na konci 2. měsíce.

Formulujte problém jako LP, přičemž cílem je, aby firma byla schopna dodat požadované množství zboží a přitom minimalizovala své náklady. Výrobky považujte za dokonale dělitelné.

Jelikož trvanlivost produktů je opravdu velký problém, zvažuje manažer příkaz prodávat nejstarší výrobky nejdříve. Jak by vydání takového příkazu ovlivnilo formulaci, respektive řešení celého problému?