1. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Opakování lingebry – matka moudrosti a optimalizačních metod

Příklady naleznete na zadní straně.

D: Množina $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinní prostor*, pokud A je tvaru $L+v$ pro nějaký lineární prostor L a posuvný vektor $v \in \mathbb{R}^d$. Tvrzením „A je tvaru $L+v$“ se myslí bijekce mezi vektory z L a vektory A zadaná jako $b(u) = u + v$. *Dimenze* afinního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru L.

D: Vektor x je *afinní kombinací* konečné množiny vektorů $a_1, a_2, \ldots a_n$ pokud $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, kde α_i jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není afinní kombinací ostatních.

D: Pokud máme množinu vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$, můžeme uvažovat její *afinní obal*, což je množina všech vektorů A, které jsou afinní kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

D: *báze* vektorového (afinního) prostoru je minimální množina taková, že každý prvek prostoru lze vyjádřit jako její lineární (afinní) kombinace.

T: Každý lineární prostor dimenze k obsahuje k-vektorovou bázi. Takovou bázi dokonce můžeme najít *ortogonální* (nebo dokonce *ortonormální*) a stejně tak můžeme najít *ortogonální doplněk* této báze.

Příklad první

Vyřešte Gauss-Jordanovou eliminací následující systém rovnic:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z + w &= 0 \\ 2x + 4y + 2z + 2w &= 5 \\ -x + 2y + 2z + w &= 7 \\ 4z &= 2 \end{aligned}$$

Jak vypadá afinní podprostor řešení?

Příklad druhý

Dokažte následující ekvivalenci:

Množina $n+1$ vektorů $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ v $\mathbb{R}^d$ je afinně nezávislá právě tehdy, když množina n vektorů $v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0, \ldots, v_n - v_0$ je lineárně nezávislá.

Hint: Zaměřte se na afinní závislost.

Příklad třetí

1. Dokažte, že každou afinní nadrovinu lze vyjádřit jako množinu řešení soustavy
$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x = b\},$$
kde $c \in \mathbb{R}^d$ a $b \in \mathbb{R}$.
2. Dokažte, že každý vlastní afinní podprostor prostoru konečné dimenze lze vyjádřit jako průnik konečně mnoha (afinních) nadrovin. (Vlastní podprostor znamená, že podprostor nepokrývá celý vektorový prostor.)

Příklad čtvrtý

(Hlavní chod cvičení!) Dokažte následující ekvivalenci, která dává snadný algebraický popis afinních prostorů:

Množina $F \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní podprostor, právě když $F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Ax = b\} \neq \emptyset$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ a nějaký vektor $b \in \mathbb{R}^d$.

Příklad pátý

1. Mohou se dvě dvoudimenzionální roviny (prostě klasické roviny) protínat v jednom bodě, pokud jsme v prostoru $\mathbb{R}^4$?
2. Mohou se dva prostory dimenze 3 protínat v $\mathbb{R}^5$ v jednom bodě?

Příklad šestý

Vyřešte grafickou metodou následující systém nerovnic:

$$\begin{aligned} x + y + z &\geq 2 \\ x + y + z &\leq 2 \\ x + 2y - z &\leq 10 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0 \end{aligned}$$

Nalezněte speciálně ta řešení, která maximalizují proměnnou x, resp. y, resp. z.

Nápověda: Řešením grafickou metodou prostě myslíme: „nakreslete množinu řešení určenou polorovinami na papír a rozhodněte, jestli je neprázdná (systém nemá řešení), jednobodová, omezená nebo neomezená.“