Příklady z Matematiky++

4. série - Homotopické a homologické grupy

nápověda **24. 5. 2018**,
cvičení/odevzdat do **29. 6. 2018**

Definice: Nechť K je konečný simpliciální komplex. Jako Δ-*komplex* definujeme toplogický prostor, který vznikne jako faktor prostor $|K|$ zidentifikováním některých simplexů K. Zidentifikování musí splňovat následující pravidla: a) ztotožňovat smíme pouze simplexy stejné dimenze, b) kdykoliv ztotožňujeme simplexy σ a τ, ztotožnění musí být bijekce na jejich relativních vnitřcích.

Δ-komplexy se chovají jako simpliciální komplexy se dvěma rozdíly: v Δ-komplexu může být více simplexů se stejnou množinou vrcholů a dovolujeme simplexům, aby měly ztotožněny některé ze svých stěn stejné dimenze. Např. zatímco 1-dim simpliciální komplexy odpovídají grafům, 1-dim Δ-komplexy jsou přesně multigrafy.

Definice homologických grup pro Δ-komplex X nad $\mathbb{Z}_2$ je přímočarým zobecněním simpliciální homologie. Nechť X vznikl ze simpliciálního komplexu K a $p\colon |K| \to X$ je kanonická projekce na faktor. Označme jako K_k množinu všech k-simplexů v K. Definujeme $C_k(X;\mathbb{Z}_2)$ jako prostor všech formálních lineárních kombinací prvků množiny $\{p(\sigma) : \sigma \in K_k\}$ nad $\mathbb{Z}_2$. Pokud pro $\sigma \in K$ platí $\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} \tau_i$, definujeme $\partial_k(p(\sigma)) := \sum_{i=0}^{k} p(\tau_i)$. Na k-řetězce rozšíříme ∂_k lineárně. Ostatní definice jsou beze změny.

1. Dokažte, že $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ pro X, Y křivkově souvislé prostory. **[4]**

2. Ukažte, že v následujících případech neexistuje retrakce $r\colon X \to A$:

   (a) $X = S^1 \times B^2$, $A = S^1 \times S^1$, **[4]**

   (b) $X = S^1 \times B^2$, $A = \{(1,0)\} \times S^1$ (tj. A je nulhomotopická křivka v X). **[4]**

   Připomínáme, že B^2 je 2-dimenzionální disk. Retrakcí $r\colon X \to A$ rozumíme spojité zobrazení takové, že $r|_A = \mathrm{id}$.

3. Mějme $f\colon |K| \to |L|$ spojité zobrazení polyedrů a $s\colon V(K) \to V(L)$ zobrazení mezi vrcholy simpliciálních komplexů.

   (a) Předpokládejme, že s je simpliciální aproximace f. Dokažte, že s je nutně simpliciální zobrazení. **[2]**

   (b) Dokažte, že pokud je s simpliciální aproximací f, pak f a $|s|$ splňují *elementární homotopickou* podmínku. **[2]**

   Připomeňme, že s je simpliciální aproximací f, jestliže pro každý vrchol $v \in V(K)$ platí $f(\mathrm{st}^\circ(v)) \subseteq \mathrm{st}^\circ(s(v))$. Dále připomeňme, že dvě spojitá zobrazení $f, g\colon |K| \to |L|$ splňují *elementární homotopickou* podmínku, pokud pro každé $x \in |K|$ existuje simplex v L, do něhož patří $f(x)$ i $g(x)$.

4. Mějme $f\colon K \to L$ simpliciální zobrazení. Pořádně dokažte, že $f_{\#k}\partial_{k+1} = \partial_{k+1} f_{\#(k+1)}$ (stačí nad $\mathbb{Z}_2$). **[2]**

5. Spočtěte všechny homologické grupy (nad $\mathbb{Z}_2$) Δ-komplexu X, který vznikne z n-dimenzionálního simplexu zidentifikováním všech stěn stejné dimenze. Přesněji řečeno, očíslujeme-li vrcholy n-simplexu $0, \ldots, n$, tak dva simplexy $\sigma = (v_0^\sigma, \ldots, v_k^\sigma)$ a $\tau = (v_0^\tau, \ldots, v_k^\tau)$ dimenze k, kde $v_i^\sigma < v_j^\sigma$ a $v_i^\tau < v_j^\tau$ kdykoliv $i < j$, jsou zidentifikovány následovně: bod $\sum_{i=0}^k \alpha_i v_i^\sigma$ (v barycentrických souřadnicích) ležící v σ je zidentifikován s bodem $\sum_{i=0}^k \alpha_i v_i^\tau$ v τ. **[5]**

6. Interpretujte kohraniční operátor, kocykly a kohranice pro 1-dimenzionální simpliciální komplexy (grafy). **[2]**