Příklady z Matematiky++

3. série – Kategorie a simpliciální komplexy

nápověda **10. 5. 2018**, odevzdat do **17. 5. 2018**

1. Ukažte, že součin dvou topologických prostorů odpovídá kategoriální definici. **[2]**

2. Najděte v kategorii metrických prostorů, kde morfismy odpovídají spojitým zobrazením, příklad morfismu, který je zároveň monomorfismem a epimorfismem, ale není izomorfismem. Své tvrzení zdůvodněte. **[3]**

3. Nechť K je simpliciální komplex a nechť $\sigma \in K$ je jeho stěna, která je obsažena v jediné maximální $\tau \in K$; $\sigma \subsetneq \tau$. Elementárním kolapsem budeme rozumět operaci, kdy z komplexu K utvoříme komplex K', jehož vrcholy se shodují s vrcholy K a jehož množinou stěn je množina stěn K bez následující množiny:

$$\{\vartheta \in K : \sigma \subseteq \vartheta \subseteq \tau\}.$$

   Pořádně dokažte, že K a K' jsou homotopicky ekvivalentní. **[5]**

4. Mějme konečný simpliciální komplex K. Pro každou stěnu $\sigma \in K$ rozumíme *(otevřenou) hvězdou* σ podprostor $\mathrm{st}(\sigma) = \bigcup_{s \supseteq \sigma} \mathrm{int}(s)$, tedy sjednocení všech relativních vnitřků simplexů simpliciálního komplexu K, které mají σ jako stěnu. *Relativním vnitřkem* simplexu s rozumíme $\mathrm{int}(s) = |s| \setminus \bigcup_{\tau \subsetneq s} |\tau|$.

   (a) Ukažte, že $\mathrm{st}(\sigma)$ je kontraktibilní otevřený podprostor $|K|$. **[4]**

   (b) Dokažte, že $\{\mathrm{st}(v)\}_{v \in V(K)}$ je *dobré pokrytí* simpliciálního komplexu $|K|$. **[4]**

   Dobré pokrytí simpliciálního komplexu je otevřené pokrytí, jehož všechny otevřené množiny a stejně tak i všechny konečné průniky těchto otevřených množin, jsou buď prázdné, nebo kontraktibilní.

5. Mějme K konečný geometrický simpliciální komplex. Popište nerv otevřeného hvězdovitého pokrytí K, kde *otevřeným hvězdovitým pokrytím* rozumíme pokrytí z příkladu 4, to jest $\{\mathrm{st}(v)\}_{v \in V(K)}$. **[4]**

6. Nechť G je bipartitní graf s partitami A a B. Definujme N_A jako simpliciální komplex s množinou vrcholů A a stěnami takovými podmnožinami A, že jejich vrcholy mají společného souseda v B. Simpliciální komplex N_B je definován analogicky. Dokažte, že N_A je homotopicky ekvivalentní N_B. **[4]**

7. **Na rozmyšlení:** Ukažte, že následující podprostor $\mathbb{R}^2$ nejde triangulovat:

$$\{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, \text{ a } x = 0 \text{ nebo } 1/n, \text{ pro nějaké } n \in \mathbb{N}\} \cup ([0, 1] \times \{0\}).$$

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1718.html`