Příklady z Matematiky++

3. série – Reprezentace konečných grup

nápověda **9. 5. 2017**, odevzdat do **30. 6. 2017**

Definice: $\mathbb{S}_n$ značí grupu permutací $\{1, \ldots, n\}$ se skládáním.

Definice: Skalární součin, pokud není řečeno jinak, je $\langle \varphi, \psi \rangle = \mathbb{E}_{g \in G}\, \varphi(g)\overline{\psi(g)}$ pro $\varphi, \psi \colon G \to \mathbb{C}$.

1. Najděte reprezentaci $g \colon G \to \mathrm{GL(V)}$, pro kterou existuje invariantní podprostor $W \subset V$ takový, že $W^\perp$ invariantní není. **[1]**

2. Nechť $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{\mathrm{n}})$ je ireducibilní reprezentace. Nechť R_g je matice $\rho(g)$ vzhledem k bázi zvolené tak, že všechny R_g jsou unitární pro $g \in G$. Nechť $r_{i,j}(g)$ značí prvek R_g na pozici i, j. Na $r_{i,j}$ se díváme jako na funkci $G \to \mathbb{C}$ pro pevné i, j. Dokažte, že pak $\langle r_{i,j}, r_{k,l} \rangle = 1/n$ pro $(i, j) = (k, l)$ a 0 jinak. **[1]**

3. (Maschkeho věta nad obecným tělesem charakteristiky 0.) Nechť G je konečná grupa, $\mathbb{T}$ těleso charakteristiky 0 a $\rho \colon G \to \mathrm{GL(V)}$ reprezentace, kde $\dim V < \infty$. Ukažte, že je-li U invariantní podprostor V, pak existuje invariantní podprostor W takový, že $V = U \oplus W$. **[2]**
   Hint: Definujte W jako jádro vhodně zprůměrované projekce $V \to U$.

4. Nechť $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{\mathrm{n}})$ je ireducibilní reprezentace konečné grupy G s charakterem χ. Nechť C je centrum G (tj. $C := \{s \in G \mid (\forall g \in G)(sg = gs)\}$).

   (a) Ukažte, že pro každé $s \in C$ je $\rho_s = c_s I_n$ pro nějaké $c_s \in \mathbb{C}$. Z toho odvoďte, že $|\chi(s)| = n$ pro každé $s \in C$. **[1]**

   (b) Ukažte, že $n^2 \leq |G| \,/\, |C|$. **[1]**

   (c) Nechť $\rho_s \neq I_n$ pro každé $s \neq 1_G$. Ukažte, že pak je C cyklická. **[2]**

5. Najděte všechny ireducibilní reprezentace cyklické grupy řádu $n \in \mathbb{N}$ a jejich charaktery. Ověřte, že tak dostanete právě ty charaktery, které znáte z komutativní Fourierovy analýzy, a dále ověřte, že formule pro nekomutativní verzi Fourierovy transformace je stejná jako v komutativní verzi. **[1]**

6. Nechť $\rho \colon \mathbb{S}_n \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{\mathrm{n}})$ je permutační reprezentace $\mathbb{S}_n$. Definujeme $W := \{v \in \mathbb{C}^n \mid \sum_i^n v_i = 0\}$. Dokažte, že restrikce ρ na W je ireducibilní reprezentace S_n pro každé $n \geq 2$. **[2]**

7. Dokažte, že $\widehat{\varphi * \psi}(\rho) = \widehat{\varphi}(\rho)\widehat{\psi}(\rho)$ pro reprezentaci $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{\mathrm{n}})$. **[1]**

8. Pro $\pi \in \mathbb{S}_n$ definujeme $\lambda(\pi) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ jako vektor délek všech cyklů v π seřazených do neklesající posloupnosti.

   (a) Dokažte, že dvě permutace $\pi, \sigma \in \mathbb{S}_n$ jsou konjugované právě tehdy, když $\lambda(\pi) = \lambda(\sigma)$. **[1]**

   (b) Popište Spechtův modul S^λ a akci grupy $\mathbb{S}_n$ na něm explicitně pro $\lambda = (n)$, $\lambda' = (1, \ldots, 1)$ a $\lambda'' = (n-1, 1)$. **[2]**

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1617.html`