Příklady z Matematiky++

2. série – Fourierova analýza

nápověda **25. 4. 2017**, odevzdat do **30. 6. 2017**

Definice: Řekneme, že $y \in \mathbb{Z}_p$ je *kvadratický zbytek* v $\mathbb{Z}_p$, pokud existuje $x \in \mathbb{Z}_p$ takové, že $y = x^2$.

1. Ukažte, že charaktery jsou vlastní vektory pro operátor konvoluce (s libovolnou pevně danou funkcí). Tj. pro zobrazení f a charakter χ platí $f * \chi = \lambda \cdot \chi$. Čemu se rovná vlastní číslo λ pro charakter χ? **[1]**

2. Buď G konečná abelovská grupa a H její podgrupa. Mějme zobrazení $f\colon G \to \mathbb{C}$ a prvek $a \in G$. Dokažte, že

$$\frac{1}{|H|}\sum_{x \in H} f(x+a) = \sum_{y \in H^{\perp}} \widehat{f}(y)\chi_y(a).$$

   Připomeňme, že $H^{\perp} = \{a \in G\colon \chi_a(x) = 1, \forall x \in H\}$. **[2]**

3. Funkce $f\colon \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ je *rostoucí*, pokud pro všechna $x, y \in \{-1,1\}^n$ taková, že $x_i \leq y_i$ pro každé i, $f(x) \leq f(y)$. Předpokládejte, že $-1 < 1$.

   (a) Ukažte, že pro libovolnou rostoucí funkci $f\colon \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ platí $\mathrm{Inf}_i(f) = \widehat{f}(\{i\})$. **[2]**

   (b) Ukažte, že pro n liché funkce $f(x) = \mathrm{sgn}(\sum_i x_i)$ maximalizuje celkový vliv mezi rostoucími funkcemi n proměnných z $\{-1,1\}^n$ do $\{-1,1\}$. Celkovým vlivem rozumíme $\mathrm{Inf}(f) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Inf}_i(f)$. **[2]**

4. Pro p prvočíslo a $r \in \mathbb{Z}_p$ definujme $\mathrm{Gau}(r) := \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} e(rx^2/p)$ (tzv. Gaussova suma). Dokažte, že

   (a) $\mathrm{Gau}(rs^2) = \mathrm{Gau}(r)$ pro $s \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$, **[1]**

   (b) pokud -1 není kvadratický zbytek v $\mathbb{Z}_p$, tak $\mathrm{Gau}(-r) = -\mathrm{Gau}(r)$, **[2]**

   (c) $\mathrm{Gau}(1)^2 = \pm p$ pro p prvočíslo různé od 2. **[2]**

5. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je 1-periodická funkce se spojitou derivací.

   (a) S použitím vzorečku pro $\widehat{f}(n)$ a integrace per partes dokažte:

$$\widehat{f'}(n) = 2\pi i n \cdot \widehat{f}(n). \qquad \textbf{[1]}$$

   (b) S použitím Fejérovy věty dokažte, že pro dvě spojité 1-periodické funkce $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pro které je $\widehat{g}(n) = \widehat{h}(n)$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$, platí $g = h$. **[1]**

   (c) Najděte všechny 1-periodické funkce $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, které mají spojitou druhou derivaci a splňují

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = f(x). \qquad \textbf{[1]}$$

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1617.html`