Příklady z Matematiky++

1. série – Harmonická analýza

nápověda po **28. 3. 2017**, odevzdat do **30. 6. 2017**

Definice: Pro zobrazení $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ definujme *vliv i-té proměnné* jako

$$V_i(f) := \Pr[f(x) \neq f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)].$$

Definice: Mějme grupu G a symetrickou množinu $S \subseteq G$ (tj. $a \in S \Rightarrow -a \in S$). *Cayleyho graf* $\mathrm{Cay}(G, S)$ je graf s množinou vrcholů G, kde vrcholy a, b jsou spojeny hranou právě tehdy, když $b - a \in S$.

Definice: Pro funkce $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ definujeme jejich *konvoluci* jako

$$(f * g)(z) := \mathop{\mathbb{E}}_{x \in G} f(x) g(z - x).$$

Definice: Definujme *nosič* zobrazení $f\colon G \to \mathbb{C}$ jako množinu $\mathrm{Supp}(f)$ všech bodů $x \in G$, pro které je $f(x) \neq 0$.

1. Spočtěte vlivy jednotlivých proměnných pro zobrazení $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$:
   (a) $f(x) = x_1$, **[0.5]**
   (b) $f(x) = \sum_i x_i \bmod 2$, **[0.5]**
   (c) $f(x)$ je „většinový názor“, tj. taková hodnota, která se mezi x_i vyskytuje častěji (v případě rovnosti volíme 0). **[1]**

2. Nalezněte zobrazení, které nabývá hodnoty 0 i 1 stejně často a každá proměnná má vliv nejvýše $\mathcal{O}(\log(n)/n)$. **[3]**

3. Buď G konečná abelovská grupa, χ její charakter a $S \subseteq G$ symetrická množina neobsahující nulový prvek G. Dále buď M normovaná matice sousednosti $\mathrm{Cay}(G, S)$, tj. $M_{ij} = 1/|S|$ pokud $j - i \in S$ a 0 jinak.
   (a) Uvažme vektor $x \in \mathbb{C}^G$ takový, že $x_a = \chi(a)$. Dokažte, že x je vlastní vektor grafu $\mathrm{Cay}(G, S)$ (tj. matice M). **[1]**
   (b) Určete vlastní čísla cyklu na n vrcholech. **[1]**
   (c) Určete vlastní čísla d-dimenzionální hyperkrychle H_d, tj. $V(H_d) = \{0,1\}^d$ a (a, b) tvoří hranu, pokud se a a b liší přesně v jedné souřadnici. **[2]**

4. Nalezněte matici lineárního zobrazení pro Fourierovu transformaci nad $\mathbb{Z}_n$, tj. matici M_n takovou, že pro každou funkci $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$ platí
   $$(\widehat{f}(\chi_0), \ldots, \widehat{f}(\chi_{n-1}))^T = M_n (f(0), \ldots, f(n-1))^T.$$
   Spočtěte determinant M_n a ověřte, že Fourierova transformace je bijekce. **[2]**

5. Buď G konečná, abelovská grupa a $f, g\colon G \to \mathbb{C}$. Dokažte, že platí:
   (a) $\mathrm{Supp}(f * g) \subseteq \mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(g)$, **[1]**
   (b) $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot ||g||_q$, kde $1/p + 1/q = 1$, **[2]**
   (c) $\widehat{f \cdot g}(\chi) = \sum_{\zeta \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi - \zeta) \widehat{g}(\zeta)$. **[1]**

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/m++1617.html`