Příklady z Matematiky++

2. série – Míra a integrál

nápověda po **8. 12. 2015**, odevzdat do **15. 12. 2015**

1. Mějme měřitelný prostor $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a měřitelné funkce $f, g : X \to \mathbb{R}$. Dokažte, že pokud $\int g < \infty$ a $|f| \leq g$ skoro všude, potom $\int f < \infty$. **[2]**

2. Rozhodněte (a zdůvodněte):

   (a) Existuje funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, jejíž Lebesgueův integrál $\int_0^1 f$ existuje a je konečný, ale Newtonův integrál $\int_0^1 f$ neexistuje? **[1]**

   (b) Existuje funkce $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, jejíž Newtonův integrál $\int_0^\infty f$ existuje a je konečný, ale Lebesgueův integrál $\int_0^\infty f$ neexistuje? **[1]**

3. Sestrojte posloupnost spojitých funkcí f_n na $[0,1]$ takovou, že $0 \leq f_n \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$, avšak posloupnost $\{f_n(x)\}$ nekonverguje pro žádné $x \in [0,1]$. **[2*]**

4. Ukažte, že následující funkce f definovaná na $(0,1)\times(0,1)$ není integrovatelná na $[0,1]\times[0,1]$:
$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
[2*]

5. Nechť f je omezená reálná lebesgueovsky měřitelná funkce z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}$. Dokažte, že existují borelovské funkce g a h takové, že $g = h$ skoro všude a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^k$. **[2]**

6. Pomocí následujících bodů určete objem jednotkové n-dimenzionální koule B_n.

   (a) Buď $I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\|x\|^2/2}\,\mathrm{d}x$, kde $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ je eukleidovská norma. Vyjádřete I_n pomocí I_1. **[0.5]**

   (b) Vyjádřete I_n pomocí $V_n = \mathrm{Vol}(B_n)$ a vhodného jednorozměrného integrálu. Uvažujte přírůstek I_n na mezisféří o vnitřním poloměru r a vnějším poloměru $r + \mathrm{d}r$. **[1*]**

   (c) Vypočtěte V_n pomocí (b). **[1*]**
   Hint: Nezapomeňte, že na definici faktoriálu $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ pro každé nezáporné n.
