

Příklady z Matematiky++

4. cvičení – Koncentrace míry

16. 12. 2015

1. Buď $C(t)$ sférický vrchlík výšky $1 - t$ (pro $-1 \leq t \leq 1$):

$$C(t) := \{x \in S^{n-1} : x_1 \geq t\}$$

Dokažte $\mu(C(t)) \leq e^{-t^2 n/2}$, kde míra $\mu(C(t)) := \lambda(\tilde{C}(t))/\lambda(B^n)$ a $\tilde{C}(t)$ je kužel vzniklý spojením počátku a každého bodu z $C(t)$ úsečkou.

Hint: Ukažte, že $\tilde{C}(t)$ je podmnožinou vhodné koule o poloměru $\sqrt{1-t^2}$ pro dost malá t .

2. Odvoďte koncentraci míry pro skalární součin dvou náhodných jednotkových vektorů v \mathbb{R}^n .
3. Odhadněte pravděpodobnost, že náhodná přímka procházející počátkem protne jednotkovou kouli se středem $(2, 0, 0, \dots, 0)$.
4. S pomocí Lévyho lemmatu ukažte, že pro 1-lipschitzovské funkce $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ je střední hodnota (tj. $\int_{S^{n-1}} f(x) d\mu(x)$) vzdálená od mediánu nejvýše $O(1/\sqrt{n})$.