Příklady z Matematiky++

2. cvičení – Míra a integrál

4. 11. 2015

1. Ukažte, že pro každou lebesgueovsky měřitelnou $A \subseteq \mathbb{R}^k$ existují borelovské $B, C \subseteq \mathbb{R}^k$ takové, že $B \subseteq A \subseteq C$ a $\lambda(A \setminus B) = \lambda(C \setminus A) = 0$. (Tedy každou měřitelnou množinu lze přesně aproximovat borelovskou a to jak zevnitř, tak zvenku.)

2. Mějme měřitelný prostor $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a nezáporné jednoduché funkce $f, g : X \to \mathbb{R}$. Ukažte, že
$$\int (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu + \int g\,\mathrm{d}\mu$$

3. Buď $(Y, \mathcal{S}, \mu)$ měřitelný prostor a $f : Y \to \mathbb{R}$ měřitelná. Ukažte, že „skoro žádným“ změněním oboru integrace nezměníte hodnotu integrálu, to jest pro každé $X, X' \subseteq Y$ takové, že $\mu(X \,\Delta\, X') = 0$ platí:
$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{X'} f(x)\,\mathrm{d}\mu$$
pokud je alespoň jeden z nich definován.

4. Dokažte Léviho větu o monotónní konvergenci, která zní: Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ měřitelný prostor a $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ nezáporné měřitelné funkce. Pokud $f_n \to f$ skoro všude na $D \subseteq X$ a $f_n \le f$, tak $\int_D f = \lim_n \int_D f_n$.
Hint: Užijte Fatouovo lemma.

5. Najděte posloupnost spojitých funkcí $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$, pro kterou platí:
   - $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pro všechna $x \in [0,1]$,
   - $\int_0^1 f_n(x)dx \to 0$ pro $n \to \infty$,
   - $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ není lebesgueovsky integrovatelná.

6. Spočtěte integrál
$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
Hint: Užijte Taylorův rozvoj vhodné funkce. [*]

7. Navrhněte vhodný pravděpodobnostní prostor pro experiment „vybereme 3 body v jednotkovém čtverci (uniformně a nezávisle).“