Příklady z Matematiky++

1. cvičení – Míra a σ-algebry

14. 10. 2015

Definice: Množina je **hustá**, pokud má neprázdný průnik s každou neprázdnou otevřenou množinou. Množina je **řídká**, pokud je její doplněk hustý.

Definice: Minimální σ-algebru obsahující množinový systém $\mathcal{H}$, nazýváme σ-algebrou **generovanou** $\mathcal{H}$. σ-algebru generovanou otevřenými intervaly konečné délky (obecněji otevřenými koulemi) nazýváme **borelovské množiny**.

Definice: Buď $(X, \mathcal{S}_X, \mu_X)$ a $(Y, \mathcal{S}_Y, \mu_Y)$ měřitelné prostory. Funkce $f : X \to Y$ je **měřitelná**, pokud $\forall S \in \mathcal{S}_Y : f^{-1}(S) \in \mathcal{S}_X$.

Definice: O reálné funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ říkáme, že je měřitelná, pokud je měřitelná ve smyslu předchozí definice s tím, že na definičním oboru máme Lebesgueovu míru, ale na oboru hodnot jsou měřitelné pouze borelovské množiny.

1. Uveďte příklad podmnožiny $\mathbb{R}$, která je uzavřená i otevřená, a podmnožiny, která není ani jedno.
2. Uveďte příklad husté podmnožiny $\mathbb{R}$.
3. Ukažte, že každá otevřená podmnožina reálných čísel je sjednocením spočetně mnoha intervalů. [*]
4. Ukažte, že průnik libovolně mnoha σ-algeber (definovaných nad stejnou nosnou množinou) je σ-algebra.
5. Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je měřitelný prostor, kde $\mathcal{S}$ je konečná σ-algebra. Charakterizujte měřitelné funkce typu $X \to \mathbb{R}$.
6. Přímo z definice ukažte, že $\mathbb{Q}$ má míru 0. [*]
7. Zkonstruujte kompaktní řídkou množinu kladné Lebesgueovy míry. [*]
8. Rozhodněte, zda jsou následující podmnožiny $\mathbb{R}$ borelovské: $\mathbb{N}$, iracionální čísla, uzavřené intervaly.
9. Ukažte, že reálná funkce f je měřitelná právě tehdy, když $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ je množina $\{x : f(x) < \alpha\}$ měřitelná. [**]
