Cvičení z Diskrétní matematiky

7. cvičení – Kombinatorické počítání

13. 11. 2017

Věta (Princip inkluze a exkluze): Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny, pak platí:

$$\left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| = \sum_{k\in[n]} (-1)^{k-1} \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right|$$

Věta: Počet permutací n-prvkové množiny bez pevného bodu je:

$$š(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!}$$

1. Kolik existuje možností, jak rozmístit n nerozlišitelných kuliček do p rozlišitelných přihrádek? Co když žádná přihrádka nesmí být prázdná? Co když jsou kuličky rozlišitelné?

2. Kolik existuje ekvivalencí na n-prvkové množině. (Nalezněte rekurzivní vzorec.) [*]

3. Dokažte, že platí (pro $n \geq k \geq 1$):

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

4. Kolik čísel z množiny [1000] je zůstane po vyškrtání násobků 4, 6 a 10?

5. Dokažte následující vztahy (pro $n \geq r \geq k \geq 1$):

   (a) $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$,

   (b) $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$ a

   (c) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$. [*]

6. Kolik existuje permutací na n-prvkové množině s právě jedním pevným bodem?

7. Ukažte pro $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ platí: [*]

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Domácí úkol

(odevzdat do začátku cvičení 20. 11. 2017)

1. Dokažte, že pro počet permutací bez pevného bodu platí: **[1]**

$$\check{s}(n) = n\,\check{s}(n-1) + (-1)^n$$

2. Dokažte, že pro počet permutací bez pevného bodu platí: **[2]**

$$\check{s}(n) = (\check{s}(n-1) + \check{s}(n-2))(n-1)$$