# Cvičení z Diskrétní matematiky

## 4. cvičení – Relace a funkce

23. 10. 2017

Pro relaci $R \subseteq X^2$ definujeme $R^n$ induktivně: $R^0 = \mathrm{id}_X$ a $R^{n+1} = R \circ R^n$.

1. Mějme relaci $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 7 \mid |x - y|\}$. Dokažte, že je to ekvivalence a popište její třídy.
2. Mějme relaci $R = \{(x, y) \in \mathcal{P}(X)^2 : |x| = |y|\}$ pro konečnou $X$. Dokažte, že je to ekvivalence a popište její třídy.
3. Mějme relaci $R \subseteq X^2$.
   (a) Ukažte, že pro konečnou $X$ existují $r, s \in \mathbb{N}$, $r < s$ taková, že $R^r = R^s$.
   (b) Ukažte, že pro nekonečnou $X$ předchozí bod nemusí platit.
   (c) Najděte $R$ na konečné $X$ takovou, že $R^n \neq R^{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
4. Buď $R \subseteq X^2$ relace. Dokažte, že:
   (a) $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_X$, právě když je $R$ antisymetrická,
   (b) $R \circ R \subseteq R$, právě když je $R$ tranzitivní,
5. Jaké vlastnosti má zobrazení vzniklé složením dvou zobrazení prostých, na, bijekcí, či jejich kombinací?
6. Dokažte, že funkce $f\colon X \to X$ na konečné množině je prostá právě tehdy, když je na. Platí to i pro nekonečnou množinu?
7. Buď $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ splňující $g \circ f = \mathrm{id}_X$ a $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Dokažte, že $f$ i $g$ jsou bijekce.
8. Mějme zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované $f(x) = (x + 1)^2$. Je toto zobrazení prosté? Je na? Co by se změnilo, pokud by místo $\mathbb{R}$ bylo $f$ definováno na $\mathbb{C}$?
9. Najděte uspořádání, které má právě jeden minimální prvek, ale nemá nejmenší prvek.
10. Existuje nějaké lineární uspořádání na množině komplexních čísel?

**Relace** Buď $R \subseteq X \times X$ binární relace.

| | |
|---|---|
| reflexivní | $\forall x \in X\colon xRx$ |
| symetrická | $\forall x, y \in X\colon xRy \Rightarrow yRx$ |
| antisymetrická | $\forall x, y \in X\colon xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ |
| tranzitivní | $\forall x, y, z \in X\colon xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ |
| ekvivalence | reflexivní, symetrická a tranzitivní |
| (částečné) uspořádání | reflexivní, antisymetrická a tranzitivní |
| lineární uspořádání | ČU a navíc $\forall x, y \in X\colon xRy \vee yRx$ |

**Zobrazení** Buď $f\colon X \to Y$ zobrazení.

| | |
|---|---|
| prosté (injektivní) | $\forall x, x' \in X\colon f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ |
| na (surjektivní) | $\forall y \in Y\colon \exists x \in X\colon f(x) = y$ |
| bijekce | prosté a na |

---

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/dm1718.html`