Cvičení z Diskrétní matematiky

3. cvičení – Relace a funkce

16. 10. 2017

Pro relaci $R \subseteq X^2$ definujeme R^n induktivně: $R^0 = \mathrm{id}_X$ a $R^{n+1} = R \circ R^n$.

1. Najděte relaci R na $\{1, 2, 3, 4\}$, která je symetrická i antisymetrická, a relaci S na $\{1, 2, 3, 4\}$, která není symetrická ani antisymetrická.
2. Popište relaci $R \circ R$, pokud relace R je:
   (a) relace „$=$“ na $\mathbb{N}$,
   (b) relace „$\leq$“ na $\mathbb{N}$,
   (c) relace „$<$“ na $\mathbb{N}$,
   (d) relace „$<$“ na $\mathbb{R}$.
3. Mějme R a S reflexivní relace na téže množině. Rozhodněte, které z relací $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $R \triangle S$, $R \circ S$ a R^{-1} jsou také reflexivní.
4. Mějme R a S tranzitivní relace na téže množině. Rozhodněte, které z relací $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $R \triangle S$, $R \circ S$ a R^{-1} jsou také tranzitivní.
5. Mějme relaci $R \subseteq X^2$.
   (a) Ukažte, že pro konečnou X existují $r, s \in \mathbb{N}$, $r < s$ taková, že $R^r = R^s$.
   (b) Ukažte, že pro nekonečnou X předchozí bod nemusí platit.
   (c) Najděte R na konečné X takovou, že $R^n \neq R^{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
6. Buď $R \subseteq X^2$ relace. Dokažte, že:
   (a) $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_X$, právě když je R antisymetrická,
   (b) $R \circ R \subseteq R$, právě když je R tranzitivní,
7. Jaké vlastnosti má zobrazení vzniklé složením dvou zobrazení prostých, na, bijekcí, či jejich kombinací?
8. Dokažte, že funkce $f\colon X \to X$ na konečné množině je prostá právě tehdy, když je na. Platí to i pro nekonečnou množinu?
9. Buď $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$ splňující $g \circ f = \mathrm{id}_X$ a $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Dokažte, že f i g jsou bijekce.
10. Mějme zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované $f(x) = (x + 1)^2$. Je toto zobrazení prosté? Je na? Co by se změnilo, pokud by místo $\mathbb{R}$ bylo f definováno na $\mathbb{C}$?
11. Existuje nějaké lineární uspořádání na množině komplexních čísel?

Relace Buď $R \subseteq X \times X$ binární relace.

reflexivní	$\forall x \in X : xRx$
symetrická	$\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$
antisymetrická	$\forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
tranzitivní	$\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
ekvivalence	reflexivní, symetrická a tranzitivní
(částečné) uspořádání	reflexivní, antisymetrická a tranzitivní
lineární uspořádání	ČU a navíc $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$

Zobrazení Buď $f : X \to Y$ zobrazení.

prosté (injektivní)	$\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
na (surjektivní)	$\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$
bijekce	prosté a na

Informace o cvičení viz `http://iuuk.mff.cuni.cz/~husek/vyuka/dm1718.html`