

Cvičení z Diskrétní matematiky

1. cvičení

2. 10. 2017

1. Dokažte, že každé kladné celé číslo je součinem prvočísel.
2. Na vodorovné tyči dlouhé 1 metr je 25 mravenců. V čase 0 se každý mravenec začne pohybovat rychlostí 1 cm/s podél tyče, a to v jednom ze dvou možných směrů (vlevo nebo vpravo). Pokud dojde na okraj tyče, spadne dolů. Pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout; místo toho se oba otočí čelem vzad a pokračují v pohybu opačným směrem. Za jak dlouho všichni spadnou z tyče? Jak musí být mravenci na počátku rozestaveni, aby tohoto času dosáhli?
3. Dokažte, že pomocí tříkorunových a pětikorunových mincí lze zaplatit každou celočíselnou částku větší než 7 Kč.
4. **Tvrzení:** Všichni koně mají stejnou barvu.
Důkaz: Indukcí dle počtu koní. Pro jednoho koně platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny skupiny N koní a chceme ho dokázat pro $N + 1$ koní. Mějme skupinu $N + 1$ koní. Pokud je v ní kůň jiné barvy, vypustíme z ní libovolného jiného koně. Z indukce mají všichni koně v této skupině stejnou barvu, což je spor s tím, že některý z $N + 1$ koní měl jinou barvu. \square
Kde je problém?
5. Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček délky n , které neobsahují dvě nuly vedle sebe, je F_{n+2} .
6. Ukažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.
7. Ukažte, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. (Můžete užít jednoznačnost prvočíselného rozkladu.)
8. Dokažte indukcí následující vzorečky (pro $n \in \mathbb{Z}^+$):

$$\sum_{i=1}^n (4i + 5) = 2n^2 + 7n$$

$$\prod_{i=2}^n \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$$

9. Dokažte (indukcí), že $6n^2 + 2n$ je dělitelné 4.