9. CVIČENÍ Z DISKRÉTNÍ MATEMATIKY

Úvod do pravděpodobnosti

D: *Náhodná veličina* nad spočetným prostorem $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je zobrazení $X{:}\,\Omega \to \mathbb{R}$.

D: *Rozdělení* (diskrétní) náhodné veličiny X je zobrazení $x \to P[X = x]$.

D: *Distribuční funkce* náhodné veličiny X je zobrazení $F_X{:}\,\mathbb{R} \to \langle 0, 1\rangle$, t.ž. $F_X(x) = P[X \le x]$.

L(Vlastnosti distribuční funkce**):** Pro každou náhodnou veličinu X platí:

- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$,
- F_X je neklesající – $x < y \Rightarrow F_X(x) \le F_X(y)$,
- $P[x < X \le y] = F_X(y) - F_X(x)$.

D: *Střední hodnota* náhodné veličiny X na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je $\mathbb{E}X = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)X(\omega)$.

Konkrétní diskrétní rozdělení:

D: *Alternativní rozdělení* $A(p)$ ... $P[X = 1] = p$, $P[X = 0] = 1 - p$.

L: $\mathbb{E}A(p) = p$.

D: *Rovnoměrné rozdělení* $R(n)$ ... $P[X = x_i] = \frac{1}{n}$ pro $Range(X) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

L: $\mathbb{E}R(n) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{x\in Range(X)} x$.

D: *Binomické rozdělení* $Bi(n,p)$ ... $P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$.

L: $\mathbb{E}Bi(n,p) = np$.

D: *Poissonovo rozdělení* $Po(\lambda)$ ... $P[X = x] = \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$.

L: $\mathbb{E}Po(\lambda) = \lambda$.

Příklad první

Kuchař upustil omylem do polévky dva různé prsteny. Všechna polévka byla rozdělena mezi 25 hostů, z toho 8 žen. Jaká je pravděpodobnost, že:

1. oba prsteny dostane jedna osoba?
2. žádný muž nedostane prsten?
3. prsteny budou mít v polévce dva muži?
4. prsteny budou mít v polévce jeden muž a jedna žena?

Jak se pravděpodobnosti změní, jestliže prsteny budou stejné?

Příklad druhý

Kuchař upustil omylem do polévky dva různé prsteny. Všechna polévka byla rozdělena mezi krále a jeho 24 hostů. Jaká je pravděpodobnost, že:

1. král ve své polévce nalezne i zbývající, rubínový, prsten, za předpokladu, že nejprve nalezne prsten diamantový?
2. král ve své polévce nalezne oba prsteny, za předpokladu, že nalezne alespoň jeden?

Příklad třetí

Určitou nemocí trpí jeden z tisíce obyvatel. K dispozícii je test, který nemocnému potvrdí s pravděpodobností 99 %, že je nemocný, a zdravému s pravděpodobností 95 %, že je zdravý. Jaká je pravděpodobnost, že když máte pozitivní výsledek testu, tak jste opravdu nemocný?

Příklad čtvrtý

U hrací kostky s n stěnami očíslovanými $1, \ldots, n$, kde každé číslo má stejnou pravděpodobnost hodu $\frac{1}{n}$, uvažme jevy: A – padlo sudé číslo, B – padlo číslo větší než $\frac{n}{2}$.

Rozhodněte, zdali jsou tyto jevy závislé či nezávislé, a to:

1. pro $n = 6$, tedy pro klasickou krychli,
2. pro $n = 8$, čili pro osmistěn,
3. pro obecné n.

Příklad pátý

Určitou nemocí trpí jeden z tisíce obyvatel. K dispozícii je test, který nemocnému potvrdí s pravděpodobností 99 %, že je nemocný, a zdravému s pravděpodobností 95 %, že je zdravý. Jaká je pravděpodobnost, že když máte pozitivní výsledek testu, tak jste opravdu nemocný?

Příklad šestý

Ukažte na příkladech, že následující vztahy nemusí platit:

1. $\mathbb{E}(XY) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$,
2. $\mathbb{E}X^2 = (\mathbb{E}X)^2$,
3. $\mathbb{E}(1/X) = 1/(\mathbb{E}X)$.

Příklad sedmý

Buď $f(\pi)$ počet pevných bodů permutace π. Určete $\mathbb{E}f$ pro π náhodnou permutaci na n prvcích.