

## Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Dokažte výpočtem i kombinatorickou úvahou:

a)  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

b)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

c)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

d)  $\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$

Úloha 2: Sečtěte:

a)  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

*Zkuste interpretovat přidaný multiplikativní faktor  $k$  tak, že ve vybrané  $k$ -tici označíte jeden z prvků.*

b)  $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$

Úloha 3: Necht  $n$  a  $d$  jsou přirozená čísla. Určete počet uspořádaných  $n$ -tic  $(a_1, \dots, a_n)$  nezáporných celých čísel takových, že  $a_1 + \dots + a_n = d$ .

Úloha 4: Ukažte, že pro každou neprázdnou konečnou množinu platí, že počet jejích podmnožin sudé velikosti (o sudém počtu prvků) je roven počtu jejích podmnožin liché velikosti.

Úloha 5:

a) Kolika způsoby lze postavit do řady 5 vodníků a 7 čarodějnic, že žádní dva vodníci nestojí vedle sebe?

b) Kolik je možností, kdybychom je za stejných podmínek měli stavět do kruhu?

c) A co když do kruhu budeme stavět opět 5 vodníků, ale 10 čarodějnic?

Úloha 6: Kolik existuje různých správných uspořádání  $n$  párů závorek tak, že závorky lze správně spárovat (dobré uzávorkování)?

*Zkuste popsat každé (i špatné) uzávorkování jako cestu ve mřížce  $n \times n$  a pak hledejte vlastnost těch špatných, která vám je pomůže spočítat.*