Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022): (13) Lineární zobrazení – obraz, jádro a isomorfismus

Cv. 1. Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, y - z, x - y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Cv. 2. Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadané obrazem báze B:

$$\begin{aligned} f(2,1,1) &= (1,2,3)^T, \\ f(1,3,5) &= (3,2,1)^T, \\ f(7,1,4) &= (1,1,1)^T. \end{aligned}$$

Rozhodněte a dokažte zda je zobrazení:

(a) prosté – pokud není, nalezněte dva různé vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$, že $f(u) = f(v)$,

(b) na – pokud není, nalezněte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takový, že pro všechna $v \in \mathbb{R}^3$ platí $f(v) \neq u$.

Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra zobrazení f.

Cv. 3. Nechť $f\colon U \to V$ a $g\colon V \to W$ jsou isomorfismy vektorových prostorů. Dokažte, že jejich složení $g \circ f\colon U \to W$ je také isomorfismus vektorových prostorů. Speciálně ukažte, že:

(a) Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté.

(b) Jsou-li f, g na, pak $g \circ f$ je na.

Cv. 4. Rozhodněte, zda jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní:

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$,

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{R}$,

(e) $\mathbb{R}^2$ a $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,

(f) prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností,

(g) $\mathbb{R}^4$ a prostor všech lineárních zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Cv. 5. Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto A - A^T$ rozhodněte které z daných vektorů patří do jádra a které do obrazu f:

(a)

$$I_2,$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 6. Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f, \dots, f^n = f \circ f^{n-1}$. Dokažte, že $\mathrm{Ker}(f^n) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{n+1})$.

Cv. 7. Rozhodněte a dokažte, zda je lineární zobrazení prosté a zda je na:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c, a+b, a)^T$,

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c+d, a+b+c, a+b, a)^T$,

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b, 2b-c, a-b+c, a+b)^T$,

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b, 2b-c, a-b+c)^T$,

(e) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b, 2b-c, a-b+2c)^T$,

Cv. 8. Dokažte, že pro všechny matice $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ platí

$$\dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)) = \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB).$$