Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022): (13) Lineární zobrazení – obraz, jádro a isomorfismus

Cv. 1. Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, y - z, x - y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Řešení:
Isomorfismus dvou vektorových prostorů je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení (tedy lineární zobrazení, které je bijekce). Zjistíme dimenzi jádra (pokud je zobrazení prosté, tak musí být nulová) a dimenzi obrazu (pokud je zobrazení na, tak musí být rovna dimenzi prostoru, do kterého zobrazuje).

Využijeme toho, že dimenze jádra f je rovna dimenzi jádra matice f vzhledem k libovolné bázi a obdobně dimenze obrazu f je rovna dimenzi sloupcového prostoru matice f vzhledem k libovolné bázi. Sestavíme matici zobrazení vůči kanonické bázi (jakákoliv báze by posloužila stejně):

$$[f]_{K,K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matici převedeme Gaussovou eliminací na REF:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že dimenze jádra matice je rovna jedné, takže zobrazení není prosté. To můžeme i snadno ověřit: $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(1, 1, 1)$.

Hodnost matice, a tedy dimenze sloupcového prostoru, je rovná dvěma. Tedy funkce f není ani na. Opět bychom mohli ověřit, že například vektor $(0, 0, 1)^T$ není v obraze (stejná Gaussova eliminace doplněná o pravou stranu).

Cv. 2. Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadané obrazem báze B:

$$\begin{aligned} f(2, 1, 1) &= (1, 2, 3)^T, \\ f(1, 3, 5) &= (3, 2, 1)^T, \\ f(7, 1, 4) &= (1, 1, 1)^T. \end{aligned}$$

Rozhodněte a dokažte zda je zobrazení:

(a) prosté – pokud není, nalezněte dva různé vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$, že $f(u) = f(v)$,

(b) na – pokud není, nalezněte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takový, že pro všechna $v \in \mathbb{R}^3$ platí $f(v) \neq u$.

Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra zobrazení f.

Řešení:

Prosté a dimenze jádra: Nejprve určíme, zda je zobrazení prosté. Pokud by nebylo, pak by nutně existovaly dva různé vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ (z definičního oboru) takové, že $f(u) = f(v)$. Upravme si tuto situaci:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(v) \\ [f]_{B,A}[u]_B &= [f]_{B,A}[v]_B \\ [f]_{B,A}[u]_B - [f]_{B,A}[v]_B &= \vec{0} \\ [f]_{B,A}([u]_B - [v]_B) &= \vec{0} \end{aligned}$$

kde $[f]_{B,A}$ je matice f vzhledem k bázím A, B a $[u]_B, [v]_B$ jsou vektory souřadnic vektorů u, v vůči bázi B, tedy $[f(u)]_A = [f]_{B,A}[u]_B$. Tedy pokud je zobrazení prosté, pak jeho matice má ve svém jádře jediný vektor $\vec{0}$.

Ze zadaných obrazů báze B můžeme snadno sestrojit matici f vzhledem k bázi B a kanonické bázi K:

$$[f]_{B,K} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Gaussovy eliminace najdeme její jádro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že jádro má dimenzi jedna a všechna řešení této homogenní soustavy mají tvar: $\left\{(-\frac{1}{4}t, -\frac{1}{4}t, t)^T \mid t \in \mathbb{R}\right\}$. Tedy můžeme volit vektor $[u]_B = (1, 1, -4)^T$, tedy $u = (31, 8, 8)^T$, který se zobrazí na nulu (stejně jako nulový vektor)

$$f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(31, 8, 8).$$

Všimněte si, že vektory z jádra $[f]_{B,K}$ odpovídají souřadnicím vektorů z jádra f vůči bázi B. Abychom vyjádřili vektor u vzhledem ke kanonické bázi, museli jsme tedy ještě řešit převod mezi souřadnicemi.

Vzhledem k tomu, že jádro lineárního zobrazení má dimenzi jedna, tak jeho bázi může tvořit například vektor $(31, 8, 8)^T$ (vzpomeňte, jak jsme na něj přišli, platí že $[(31, 8, 8)^T]_B = (1, 1, -4)$).

Na a dimenze obrazu: Každý vektor z obrazu je lineární kombinací sloupcových vektorů. Speciálně existuje vektor $a \in \mathbb{R}^3$ takový, že $f(a) = (1, 2, 3)^T$ (psáno v kanonické bázi), to byl náš zadaný vektor $(2, 1, 1)^T$, který měl v bázi B souřadnice $[(2, 1, 1)^T]_B = (1, 0, 0)^T$.

Z minulé Gaussovy eliminace vidíme, že dimenze obrazu (což je dimenze sloupcového prostoru, což dle věty z přednášky je rovné dimenzi řádkového prostoru) je rovná dvěma a její báze jsou například první dva vektory: $(1, 2, 3)^T, (3, 2, 1)^T$ (obraz je pak lineární obal těchto dvou vektorů). Dimenze obrazu je tedy dva a zobrazení f není na (surjektivní).

Doplněním těchto dvou vektorů na bázi $\mathbb{R}^3$ získáme vektor, který nemá předobraz ve zobrazení f. Například to může být vektor $(0,0,1)^T$ (pokud bychom nedoplňovali z kanonické báze, ale z jiné, mohl nám vyjít jiný vektor).

Cv. 3. Nechť $f\colon U \to V$ a $g\colon V \to W$ jsou isomorfismy vektorových prostorů. Dokažte, že jejich složení $g \circ f\colon U \to W$ je také isomorfismus vektorových prostorů. Speciálně ukažte, že:

(a) Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté.

(b) Jsou-li f, g na, pak $g \circ f$ je na.

Řešení:

(a) Víme, že:

$$\forall u_1, u_2 \in U\colon u_1 \neq u_2 \Rightarrow f(u_1) \neq f(u_2),$$
$$\forall v_1, v_2 \in V\colon v_1 \neq v_2 \Rightarrow g(v_1) \neq g(v_2).$$

Chceme:

$$\forall u_1, u_2 \in U\colon u_1 \neq u_2 \Rightarrow g(f(u_1)) \neq g(f(u_2)).$$

Vezmeme-li libovolná různá $u_1, u_2 \in U\colon u_1 \neq u_2$, pak $f(u_1) \neq f(u_2)$ jsou různá (f je prosté). Z toho, že g je prosté a $f(u_1), f(u_2) \in U\colon f(u_1) \neq f(u_2)$ dostáváme $g(f(u_1)) \neq g(f(u_2))$.

(b) Jen nápověda: pro libovolné $w \in W$ nejdříve najdeme jeho předobraz v vzhledem k g a pak předobraz vektoru v vzhledem k f.

Cv. 4. Rozhodněte, zda jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní:

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$,

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{R}$,

(e) $\mathbb{R}^2$ a $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,

(f) prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností,

(g) $\mathbb{R}^4$ a prostor všech lineárních zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Řešení:

Ověříme, zda existuje isomorfismus mezi danými prostory.

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$

Ano, ověříme, že zobrazení

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

je isomorfismus uvažovaných prostorů.

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři)

Ano, reálný polynom stupně nejvýš tři můžeme reprezentovat jeho koeficienty (čtyři reálná čísla taková, že $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$). Každá čtveřice čísel nám dá jeden polynom a každý polynom nám dá jednu čtveřici čísel.

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$

Ano, isomorfismem bude transpozice (to je asi ten nejpřirozenější isomorfismus mezi těmito prostory).

(d) $\mathbb{R}^2$ a $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$

Ano, můžeme volit například zobrazení

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ -a \\ b \\ -b \end{pmatrix}$$

(e) Prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností.

Ne, intuitivně protože nemáme polynomy nekonečného stupně, ale máme například posloupnost $a_n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(f) $\mathbb{R}^4$ a prostor všech lineárních forem $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Ano, vektoru $u \in \mathbb{R}^4$ přiřadíme lineární zobrazení $f(v) = u^T v$. Naopak každé lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ se dá zapsat maticí s jedním řádkem a čtyřmi sloupci (věta z přednášky).

Cv. 5. Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto A - A^T$ rozhodněte které z daných vektorů patří do jádra a které do obrazu f:

(a)

$$I_2,$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

(a) I_2

Patří do jádra, neboť $I_2 - I_2^T = 0$ (nulová matice). Nepatří do obrazu, neboť každá matice v obrazu má nulovou diagonálu (na diagonále se prvky odečtou).

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Patří do jádra i do obrazu (je obrazem sama sebe).

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Patří do jádra, ale nepatří do obrazu.

(d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nepatří do jádra, ale je obrazem (mimo jiných, protože diagonálu můžeme volit libovolně) matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cv. 6. Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f, \ldots, f^n = f \circ f^{n-1}$. Dokažte, že $\operatorname{Ker}(f^n) \subseteq \operatorname{Ker}(f^{n+1})$.

Řešení:

Napřed si zobrazení f vyjádříme maticí, tedy existuje $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $A = {}_{\mathrm{Kan}}[f]_{\mathrm{Kan}}$ (používáme A, protože toto značení je kratší). Tedy $\forall v \in \mathbb{R}^n\colon f(v) = Av$. Navíc ale máme $\forall v \in \mathbb{R}^n\colon f^n(v) = A^n v$.

Pokud $v \in \operatorname{Ker}(f^n)$, pak $f^n(v) = \vec{0}$, tedy $A^n v = \vec{0}$. Pak ale jistě

$$A^{n+1}v = A(A^n v) = A\vec{0} = \vec{0}.$$

Tedy $v \in \operatorname{Ker}(f^n) \Rightarrow v \in \operatorname{Ker}(f^{n+1})$, tudíž $\operatorname{Ker}(f^n) \subseteq \operatorname{Ker}(f^{n+1})$.

Cv. 7. Rozhodněte a dokažte, zda je lineární zobrazení prosté a zda je na:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c, a+b, a)^T$,

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c+d, a+b+c, a+b, a)^T$,

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b, 2b-c, a-b+c, a+b)^T$,

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b, 2b-c, a-b+c)^T$,

(e) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b, 2b-c, a-b+2c)^T$,

Řešení:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c, a+b, a)^T$

Je na, ale není prosté.

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c+d, a+b+c, a+b, a)^T$

Je na a je prosté.

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b, 2b-c, a-b+c, a+b)^T$

Není na (první a poslední souřadnice výsledku jsou vždy stejné), ani prosté ($f(x^2-x-2) = (0,0,0,0)^T$).

Cv. 8. Dokažte, že pro všechny matice $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ platí

$$\dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)) = \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB).$$

Řešení:

Nechť dimenze prostoru $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(A)$ a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je jeho báze, doplňme ji na bázi celého $\mathcal{S}(A)$ pomocí vektorů $w_1, w_2, \ldots, w_\ell$. Pak $\mathrm{rank}(B) = \dim(\mathcal{S}(B)) = k+\ell$. Chceme ukázat, že $\mathrm{rank}(AB) = \dim(\mathcal{S}(AB)) = \ell$. Uvědomme si, že obraz AB můžeme zkoumat zkoumáním toho, kam A zobrazí bázi $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_\ell$. Bázi $v_1, \ldots, v_k$ zobrazí na nulový vektor. Pokud by vektory $Aw_1, Aw_2, \ldots, Aw_\ell$ byly lineárně závislé:

$$\begin{aligned} \alpha_1 A w_1 + \alpha_2 A w_2 + \cdots + \alpha_\ell A w_\ell &= \vec{0} \qquad \text{(alfy netriviální)} \\ A(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_\ell w_\ell) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Ale druhý řádek je spor, neboť z volby vektorů $w_1, \ldots, w_\ell$ víme, že žádná netriviální kombinace vektorů w_j není v jádře matice A.