Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022): (12) Lineární zobrazení

Cv. 1. Rozhodněte a dokažte, zda je zadané zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ lineární pro

(a) $f_1(x) = 0$,
(b) $f_2(x) = 1$,
(c) $f_3(x) = 2x$,
(d) $f_4(x) = x + 1$,
(e) $f_5(x) = x^2$.

Cv. 2. Rozhodněte a dokažte, zda je zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ lineární pro

(a) $f_6((x_1, x_2)^T) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)^T$,
(b) $f_7((x_1, x_2)^T) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2)^T$.

Cv. 3. Pro lineární zobrazení $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ z předcházejícího cvičení spočítejte matici vzhledem ke kanonické bázi $K = \{e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T\}$, tj. matici $[f]_{KK}$.

Cv. 4. Uvažme bázi $B_U = \{(-1,0,3)^T, (2,-2,2)^T, (0,1,-3)^T\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte matici lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi B_U (tj. $[f]_{B_U B_U}$), pokud víte, že f zobrazí bazické vektory takto (všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“):

$$f((-1,0,3)^T) = (-2,0,6)^T,$$
$$f((2,-2,2)^T) = (4,-4,4)^T,$$
$$f((0,1,-3)^T) = (0,2,-6)^T.$$

Pro vektor x se souřadnicemi $[x]_{B_U} = (1,2,-1)^T$ spočítejte pomocí nalezené matice $[f]_{B_U B_U}$ souřadnice $[f(x)]_{B_U}$ obrazu vektoru x vzhledem k B_U .

Cv. 5. Pro zobrazení f z předchozího cvičení nalezněte $[f]_{B_U B_V}$, tj. matici zobrazení vzhledem k bázím

$$B_U = \{x_1 = (-1,0,3)^T, x_2 = (2,-2,2)^T, x_3 = (0,1,-3)^T\} \text{ a}$$
$$B_V = \{y_1 = (-1,1,0)^T, y_2 = (0,1,-1)^T, y_3 = (1,0,1)^T\}.$$

Pro vektor x se souřadnicemi $[x]_{B_U} = (1,2,-1)^T$ spočítejte pomocí nalezené matice $[f]_{B_U B_V}$ souřadnice $[f(x)]_{B_V}$ obrazu vektoru x vzhledem k bázi B_V.

Cv. 6. Pro báze B_U a B_V z předchozího cvičení nalezněte matici přechodu $[id]_{B_U B_V}$ od báze B_U k bázi B_V.

Pro x se souřadnicemi $[x]_{B_U} = (1,2,-1)^T$ vhledem k bázi B_U spočítejte pomocí nalezené matice přechodu souřadnice $[x]_{B_V}$ vzhledem k bázi B_V.

Cv. 7. A co když máme souřadnice $[x]_{B_V}$ vektoru x vzhledem k bázi B_V a chceme ho vyjádřit vůči bázi B_U? Nalezněte matici přechodu $[id]_{B_V B_U}$ od báze B_V k bázi B_U.

Pro vektor x se souřadnicemi $[x]_{B_V} = (1,-6,4)^T$ spočítejte pomocí nalezené matice přechodu souřadnice $[x]_{B_U}$ vůči bázi B_U.