Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2021/2022): (12) Lineární zobrazení

Cv. 1. Rozhodněte a dokažte, zda je zadané zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ lineární pro

(a) $f_1(x) = 0$,
(b) $f_2(x) = 1$,
(c) $f_3(x) = 2x$,
(d) $f_4(x) = x + 1$,
(e) $f_5(x) = x^2$.

Řešení:

Připomeňme definici lineárního zobrazení. Pro vektorové prostory U, V nad tělesem $\mathbb{T}$ je zobrazení $f : U \to V$ lineární, pokud pro každé $x, y \in U$ a $\alpha \in \mathbb{T}$ platí:

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
(ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Podmínky z definice ověříme pro zadaná zobrazení.

(a) Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

  i. $f_1(x + y) = 0 = 0 + 0 = f_1(x) + f_1(y)$ a
  ii. $f_1(\alpha x) = 0 = \alpha 0 = \alpha f_1(x)$.

  Obě podmínky jsou tedy splněny a zobrazení f_1 je lineární.

(b) Analogicky pro zobrazení f_2:

  i. První podmínka neplatí, protože

$$f_2(x + y) = 1 \neq 2 = 1 + 1 = f_2(x) + f_2(y).$$

  ii. Dále bychom již nemuseli počítat. Pro zajímavost ale prozkoumáme, zda je zobrazení homomorfní vzhledem k násobení skalárem z tělesa.

$$f_2(\alpha x) = f_2(w) = 1 \neq \alpha = \alpha 1 = \alpha f_2(x)$$

  a pro obecné $\alpha \in \mathbb{R}$ ani druhá podmínka neplatí.

  Zobrazení tedy není lineární.

(c) Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

  i. $f_3(x + y) = 2(x + y) = 2(x) + 2(y) = f_3(x) + f_3(y)$ a
  ii. $f_3(\alpha x) = 2\alpha x = \alpha 2x = \alpha f_3(x)$.

  Obě podmínky jsou splněny a zobrazení tedy je lineární.

(d) Zobrazení není lineární, například $f_3(\alpha x) = \alpha x + 1 \neq \alpha(x + 1) = \alpha f_3(x)$.

(e) Zobrazení není lineární. Ani jedna z podmínek není splněna. Například:

  i. $f_5(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2 = f_5(x) + f_5(y)$.

Cv. 2. Rozhodněte a dokažte, zda je zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ lineární pro

(a) $f_6((x_1, x_2)^T) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)^T$,
(b) $f_7((x_1, x_2)^T) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2)^T$.

Řešení:
Analogicky s předchozím příkladem, je však třeba si dát pozor na indexování vektorů.

(a) Ano, zobrazení f_6 je lineární. Pro všechna $(x_1, x_2)^T, (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$:
   i. $f_6((x_1, x_2)^T + (y_1, y_2)^T) = f_6((x_1 + y_1, x_2 + y_2)^T) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 + y_1 - x_2 - y_2)^T = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)^T + (y_1 + y_2, y_1 - y_2)^T = f_6((x_1, x_2)^T) + f_6((y_1, y_2)^T)$ a
   ii. $f_6(\alpha(x_1, x_2)^T) = f_6((\alpha x_1, \alpha x_2)^T) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_2)^T = \alpha(x_1 + x_2, x_1 - x_2)^T = \alpha f_6((x_1, x_2)^T)$.

(b) Ano, zobrazení f_7 je lineární. Ověří se podobně jako pro f_6.

Mohli bychom také využít toho, že obě zobrazení lze interpretovat jako násobení vektoru vhodnou maticí zleva (jakou?) a použít základních vlastností maticového součinu.

Cv. 3. Pro lineární zobrazení $f_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ z předcházejícího cvičení spočítejte matici vzhledem ke kanonické bázi $K = \{e_1 = (1, 0)^T, e_2 = (0, 1)^T\}$, tj. matici $[f]_{KK}$.

Řešení:
Využijeme definice matice lineárního zobrazení a matici zkonstruujeme po složkách

$$[f]_{KK} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

kde první sloupec je vektor souřadnic obrazu vektoru e_1 vzhledem ke kanonické bázi a obdobně pro druhý sloupec.

Cv. 4. Uvažme bázi $B_U = \{(-1, 0, 3)^T, (2, -2, 2)^T, (0, 1, -3)^T\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte matici lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vzhledem k bázi B_U (tj. $[f]_{B_U B_U}$), pokud víte, že f zobrazí bazické vektory takto (všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“):

$$f((-1, 0, 3)^T) = (-2, 0, 6)^T,$$
$$f((2, -2, 2)^T) = (4, -4, 4)^T,$$
$$f((0, 1, -3)^T) = (0, 2, -6)^T.$$

Pro vektor x se souřadnicemi $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ spočítejte pomocí nalezené matice $[f]_{B_U B_U}$ souřadnice $[f(x)]_{B_U}$ obrazu vektoru x vzhledem k B_U .

Řešení:
Využijeme definice matice lineárního zobrazení, věty o maticové reprezentaci lineárního

zobrazení a také tvrzení, že každé lineární zobrazení je definováno obrazem báze. Nejprve si připomeneme konstrukci matice lineárního zobrazení obecně, následně ji uchopíme intuitivně a nakonec do obecné konstrukce dosadíme konkrétní zadání úlohy.

Mějme vektorové prostory U a V na tělesem T a lineární zobrazení $f : U \to V$. Vektorový prostor U je popsán bází $B_U = \{x_1, ..., x_n\}$ a vektorový prostor V je popsán bází $B_V = \{y_1, ..., y_m\}$. *Matici lineárního zobrazení* $f : U \to V$ vzhledem k bázím B_U a B_V lze dle definice konstruujeme tak, že j-tý sloupec matice $[f]_{B_U B_V}$ je tvořen souřadnicemi $[f(x_j)]_{B_V}$ obrazu j-tého vektoru z báze B_U vůči bázi B_V. Jinými slovy, matici konstruujeme postupně přes všechny bazické vektory x_j z B_U. Příslušný sloupcový vektor x_j zobrazíme a dostáváme vektor $f(x_j)$, jehož souřadnice $[f(x_j)]_{B_V}$ vůči bázi B_V tvoří j-tý sloupec hledané matice zobrazení vůči bázím B_U a B_V.

Otázka pro lehké rozmyšlení a ověření si, že konstrukci matice lineárního zobrazení rozumíme: Máme-li n vektorů báze B_U a m vektorů báze B_V, kolik bude mít výsledná matice F sloupců a kolik řádků?

Zpět k řešení příkladu. Konstruujeme matici lineárního zobrazení $F = [f]_{B_U B_U}$ z definice. V konkrétním zadání příkladu je zobrazení $f : U \to U$ a počítáme tedy se stejnou bází a stejným vektorovým prostorem pro definiční obor i obor hodnot f. Ukážeme si výpočet prvního sloupce matice F. Mějme první bazický vektor tj. $x_1 = (-1, 0, 3)^T$, který se zobrazí na $f((-1, 0, 3)^T) = (-2, 0, 6)^T$. Následně vektor $f(x_1)$ vyjádříme vůči bázi B_U. Řešíme proto soustavu lineárních rovnic $Ax = b$ s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) \\ | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

kde vektory byly zapsány jako sloupce matice, vektory báze B_U jako matice A a vektor $f(x_1)$ jako b, tj. pravá strana rozšířené matice.
Povšimněme si, že podle sloupcové interpretace řešení soustavy lineárních rovnic platí, že má-li soustava řešení, pravá strana matice b je rovna lineární kombinaci sloupců matice, přičemž jednotlivé proměnné x jsou koeficienty této lineární kombinace a geometricky určují „míru naškálování“ příslušných sloupců matice. Díváme-li se tedy na sloupce matice soustavy jako na bázi, tak výsledný vektor řešení x udává souřadnice vektoru pravé strany b vůči bázi dané sloupci matice, tj. $[b]_{S(A)} = x$. Výpočet vyjádření vektorů vůči bázi lze provést paralelně:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 6 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Sloupcové vektory pravé strany matice, tj. řešení soustavy, tvoří sloupce hledané matice lineárního zobrazení $F = [f]_{B_U B_U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Intuitivně: Vypočítali jsme matici zobrazení, která zobrazuje vektor x vyjádřený vůči bází B_U, provede s ním transformaci (2-krát zvětší) a ponechá ho vyjádřený vůči bázi B_U. Jedná se o matici škálování, které libovolný vektor naškáluje 2-krát.

Otázka: Matice škálování vypadá „povědomě“ či „očekávatelně“. Jakou roli v tomto zobrazení hraje báze? Jak se změní matice zobrazení, změníme-li bázi resp. budeme-li mít matici zobrazení vůči jiné bázi $[f]_{B_V B_V}$? Změní se vůbec? Na tomto místě si můžete udělat alespoň odhad.

Dle věty o maticové reprezentaci lineárních zobrazné spočítáme souřadnice $f(x)$ vzhledem k B_U ze znalosti souřadnic $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ jako

$$[f(x)]_{B_U} = [f]_{B_U B_U}[x]_{B_U} = (2, 4, -2)^T.$$

Cv. 5. Pro zobrazení f z předchozího cvičení nalezněte $[f]_{B_U B_V}$, tj. matici zobrazení vzhledem k bázím

$$B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\} \text{ a}$$
$$B_V = \{y_1 = (-1, 1, 0)^T, y_2 = (0, 1, -1)^T, y_3 = (1, 0, 1)^T\}.$$

Pro vektor x se souřadnicemi $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ spočítejte pomocí nalezené matice $[f]_{B_U B_V}$ souřadnice $[f(x)]_{B_V}$ obrazu vektoru x vzhledem k bázi B_V.

<u>Řešení:</u>

Hledanou matici lineárního zobrazení $[f]_{B_U B_V}$ zkonstruujeme opět z definice. Princip výpočtu zůstává stejný. Změna oproti předchozímu příkladu proběhne v kroku vyjádření souřadnic obrazů bazických vektorů, kde místo vůči bázi B_U vyjadřujeme souřadnice vektorů vůči bázi B_V. Uvažujeme tedy následující rozšířenou soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

Hledaná matice je tedy $[f]_{B_U B_V} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Pro zadaný vektor x se souřadnicemi $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ nalezneme souřadnice jeho obrazu při zobrazení f vzhledem k bázi B_V jako

$$[f(x)]_{B_V} = [f]_{B_U B_V}[x]_{B_U} = (2, -12, 8)^T.$$

Cv. 6. Pro báze B_U a B_V z předchozího cvičení nalezněte matici přechodu $[id]_{B_U B_V}$ od báze B_U k bázi B_V.

Pro x se souřadnicemi $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ vhledem k bázi B_U spočítejte pomocí nalezené matice přechodu souřadnice $[x]_{B_V}$ vzhledem k bázi B_V.

Řešení:

Postup je opět obdobný předchozím cvičením. Hlavní rozdíl je v tom, že nebudeme provádět transformaci, resp. transformace je realizována identickým zobrazením. Souřadnice vektorů z báze B_U vzhledem k bázi B_V hledáme takto:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Hledaná matice je tedy $[id]_{B_U B_V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Konečně, zobrazme zadaný vektor se souřadnicemi $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ lineárním zobrazením reprezentovaným maticí $[id]_{B_U B_V}$. Dostáváme

$$[id]_{B_U B_V}[x]_{B_U} = [id(x)]_{B_V} = [x]_{B_V} = (1, -6, 4)^T.$$

Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru x vzhledem k bázi B_V také řešením odpovídající soustavy pro nalezení koeficientů odpovídající lineární kombinace vektorů báze B_V.

Cv. 7. A co když máme souřadnice $[x]_{B_V}$ vektoru x vzhledem k bázi B_V a chceme ho vyjádřit vůči bázi B_U? Nalezněte matici přechodu $[id]_{B_V B_U}$ od báze B_V k bázi B_U.

Pro vektor x se souřadnicemi $[x]_{B_V} = (1, -6, 4)^T$ spočítejte pomocí nalezené matice přechodu souřadnice $[x]_{B_U}$ vůči bázi B_U.

Řešení:

Pomocí identické úvahy vidíme, že v předchozím postupu pouze zaměníme levou a pravou stranu matice pro výpočet vyjádření souřadnic vzhledem k vhodné bázi.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Hledaná matice je tedy $[id]_{B_V B_U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Souřadnice $[x]_{B_U}$ spočítáme jako

$$[id]_{B_V B_U}[x]_{B_V} = [id(x)]_{B_U} = [x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T.$$

Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru opět vyjádřením jako koeficienty vhodné lineární kombinace báze B_U.